

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ
ТЕАТРА, МУЗЫКИ И КИНЕМАТОГРАФИИ
им. Н.К.Черкасова

КАФЕДРА ТЕАТРАЛЬНОЙ ТЕХНИКИ И ТЕХНОЛОГИИ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Методическая разработка
по курсу

ТЕХНИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ
ТЕАТРАЛЬНЫХ ДЕКОРАЦИЙ

для студентов

по специальности: театральная техника и
оформление спектакля

Ленинград
1986

Утверждена Кафедрой театральной техники и технологии
5 июля 1982 года

Составитель - старший преподаватель В.Я.РЫВИН

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
I. Типология поперечных сечений, их сравнение	5
2. Понятия о моментах инерции и моментах сопротивления плоских сечений. Вычисление моментов инерции и моментов сопротивления простых форм сечений	12
3. Общие способы вычисления моментов инерций сложных сечений	31
4. Вычисление моментов инерций и моментов сопротивлений для составных сечений из прокатных профилей	41
5. Графический способ определения геометрических характеристик сечений из прокатных профилей	49
Заключение	52
Приложение I. Выводы формул моментов инерции и моментов сопротивлений для простейших фигур	54
Приложение II. Графики для определения моментов инерции и моментов сопротивления для балок и ферм из брусков, труб и уголков	69
Приложение III. Задания для определения моментов инерций и моментов сопротивлений составного сечения из прокатных профилей	81

ВВЕДЕНИЕ

Тема "Геометрические характеристики плоских сечений" изучается в конце I семестра после темы "Центр тяжести тел" и выполнения домашнего задания "Определение центра тяжести (ЦТ) составного сечения из прокатных профилей". Эта тема является необходимым продолжением при подготовке всех, кто создает театральные декорации и конструкции для сценических эффектов, потому что эти разработки всегда связаны с поисками таких геометрических параметров сечений, которые при минимальных расходах материалов и массе смогут обеспечить необходимые прочность, жесткость и устойчивость конструкции. Для достижения этих свойств необходимо не только уметь подсчитывать площади, статические моменты плоских сечений или определять центры тяжести составных сечений, но и разобраться в сущности таких понятий как "моменты сопротивления сечений", влияющих на прочность валов и балок перекрытий с большими пролетами и "моменты инерции плоского сечения", влияющими на жесткость и устойчивость конструкций.

Понимание названных выше узловых тем, прочное владение теорией и практикой этих разделов курса "Технологические основы конструирования..." позволяют в дальнейшем обеспечить творческую работу студентов на старших курсах по обоснованию оптимальных вариантов любой театральной конструкции, создают возможности оперативного решения ряда производственных задач. Понимание и навыки использования специальных таблиц и графиков, приобретаемые при выполнении практических работ по теме, позволят сократить до минимума затраты времени на расчеты конструкций в части их прочности, жесткости и устойчивости.

І. ТИПОЛОГИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ, ИХ СРАВНЕНИЕ

Наиболее простые формы поперечных сечений широко известны. Давайте попробуем вместе представить себе какие-либо сечения. Ну, например, штора на окне подвешена на круглом или квадратном карнизе. Какое сечение у несущей конструкции? Конечно, круг или квадрат. Занавеси, портьеры и декорации в театре могут крепиться на деревянном бруске, трубе; могут быть использованы прокатные профили из самых различных материалов (сталь, дюралюминиевые сплавы, пластмассы и т. п.). Очевидно, что в этих случаях сечения несущих конструкций будут в виде прямоугольника, кольца, сложного составного сечения.

Для простоты дальнейших рассуждений о геометрических характеристиках воспользуемся одной незавершенной студенческой работой (рис. І). Это таблица, в основу которой были положены прекрасные принципы: во-первых, движение мысли от простейших форм к более сложным, во-вторых, краткость, в-третьих, удобство пользования. Как видно, таблица рассчитана на 8 вертикальных граф, а количество горизонтальных строк соответствует количеству типов, форм различных сечений. Из первой графы видно, что предполагалось рассмотреть 7 различных сечений, названия которых и геометрические формы приведены во второй графе. Хочется сразу же обратить внимание студентов на то, что таблица на рис. І содержит излишества. Например, круг и кольцо: достаточно рассмотреть одно кольцо, т. к. если приравнять его внутренний диаметр нулю ($r = 0$), то получим все данные для круга. Аналогично можно решить вопросы о квадрате, прямоугольнике, параллелограмме и ромбе. Ведь квадрат можно рассматривать как прямоугольник, у которого $h = b$, а параллелограмм как прямоугольник, у которого наклон ребра не равен 90° ($\gamma \neq 90^\circ$). Ромб, в свою очередь, можно рассматривать как параллелограмм, у которого все стороны равны и угол наклона ребер не равен 90° ($\gamma \neq 90^\circ$). Трапецию также можно рассматривать как сложную фигуру, составленную из треугольников и прямоугольника.

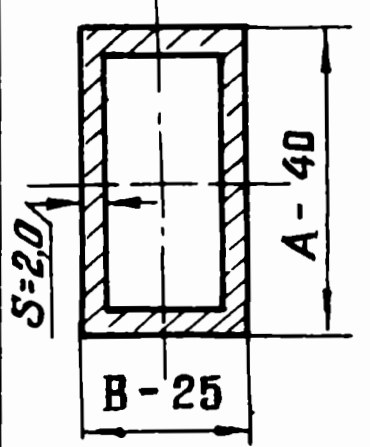
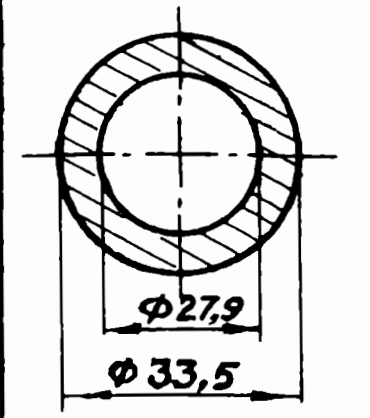
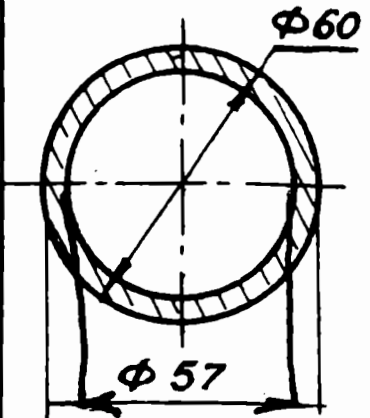
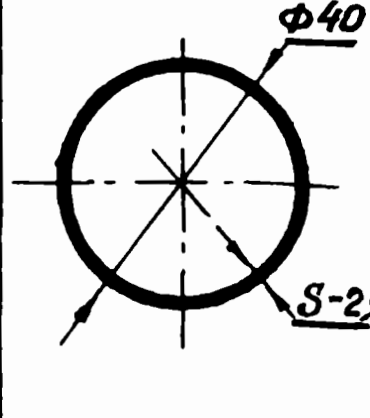
№ П/П	ЭСКИЗ СЕЧЕНИЯ, ЛИНЕЙНЫЕ РАЗМЕРЫ, ММ	Условное обозначение сечения ГОСТ	Площадь сечения F, см ²	ПРИМЕЧАНИЯ, РАСЧЕТЫ
1		<p>ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРУБА</p> <p>ПР. ТР. 40×25×2</p> <p>ГОСТ 8645-68</p>	2,44	$F = A \times B - (A - 2S) \times (B - 2S)$ $= 4,0 \times 2,5 - [(4,0 - 0,4) \times (2,5 - 0,4)]$ $= 10 - (3,6 \times 2,1) = 10 - 7,56 = 2,44 \text{ см}^2$
2		<p>ТРУБА СТАЛЬНАЯ ВОДОГАЗОПРОВОДНАЯ, ЛЕГКАЯ, С УСЛОВНЫМ ПРОХОДОМ 25 НЕОЦИНКОВ. ОБЫЧНОЙ ТОЧНОСТИ.</p> <p>Тр. 25×2,8</p> <p>ГОСТ 3262-75</p>	2,70	$F = 0,785(D^2 - d^2) = 0,785(3,35^2 - 2,79^2) = 0,785(11,22 - 7,78) = 2,70 \text{ см}^2$
3		<p>ТРУБЫ СТАЛЬНЫЕ БЕСШОВНЫЕ ХОЛОДНОДЕФОРМИРУЕМЫЕ</p> <p>Тр. 60×1,5</p> <p>ГОСТ 8734-75</p>	2,76	$F = 0,785 D^2 (1 - \alpha^2) = 0,785 \times 6^2 \times (1 - 0,90) = 2,76 \text{ см}^2$ <p>ГДЕ $\alpha = \frac{d_{\text{ВНУТР}}}{D_{\text{НАРУЖН}}} = \frac{57}{60} = 0,95; \alpha^2 = 0,90$</p>
4		<p>ТРУБЫ СТАЛЬНЫЕ ЭЛ. СВАРНЫЕ И БЕСШОВНЫЕ ДЛЯ МОТОВЕЛОМЫШЛЕННОСТИ ПРО</p> <p>Тр. 40×2,5</p> <p>ГОСТ 12132-66</p>	2,94	$F = 0,785 D^2 (1 - \alpha^2) = 0,785 \cdot 4,0^2 \cdot (1 - 0,77) = 0,785 \cdot 16 \cdot 0,23 = 2,94 \text{ см}^2$ $\alpha = \frac{35}{40} = 0,875;$ $\alpha^2 = 0,7656 = 0,77$

Рис. 2

Рассмотрим другой пример: для выполнения конструкции рекомендовано несколько типов стальных труб одинаковой длины. Формы труб, характеристика их линейных размеров и площадей сведены в таблицу на рис. 2. Необходимо выбрать вариант трубы с наименьшим расходом металла. Ясно, что при одинаковой длине и материале наименьший расход металла будет у трубы с наименьшей площадью сечения. Такой трубой является прямоугольная труба 40 x 25 x 2 ГОСТ 8645-68.

Пятая графа таблицы на рис. 1 отведена еще одной геометрической характеристике плоского сечения, названной "Статические моменты плоского сечения". Эту величину обозначают буквой S .

Она имеет размерность линейных размеров в третьей степени, т.е. мм³, см³, м³, т. к. представляет собой взятую по своему сечению сумму произведений площадей фигур на расстояние до какой-либо оси:

$$S_y = \sum F_i x_i ; \quad S_x = \sum F_i y_i ;$$

Введение в практику расчетов статических моментов в значительной степени облегчает нахождение ЦТ любого сложного составного сечения. В пятую графу не будем вписывать никаких формул, т. к. из предыдущего материала известно, что статические моменты плоской фигуры относительно любой центральной оси равны нулю, т. е. если оси проходят через ЦТ точки C , то $x_c = 0, y_c = 0$. Относительно всех других осей статические моменты всегда можно легко определить, понимая сущность расчетов.

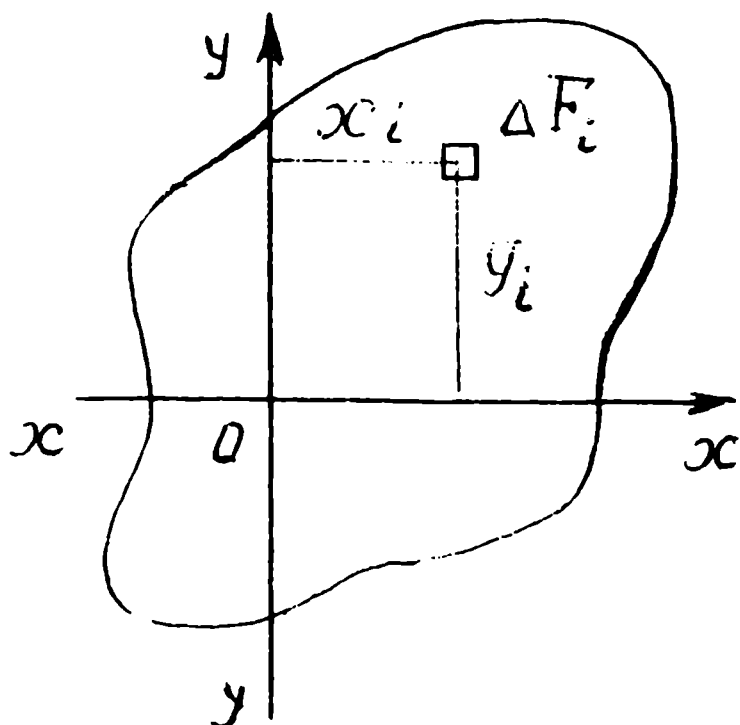
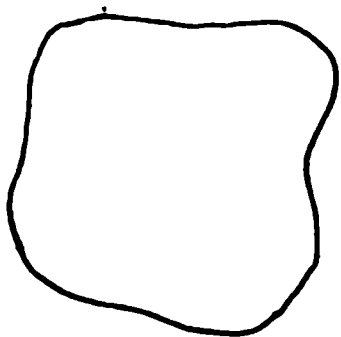
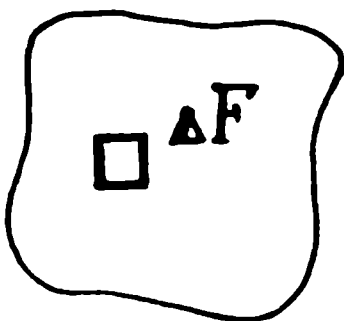


Рис. 3-а

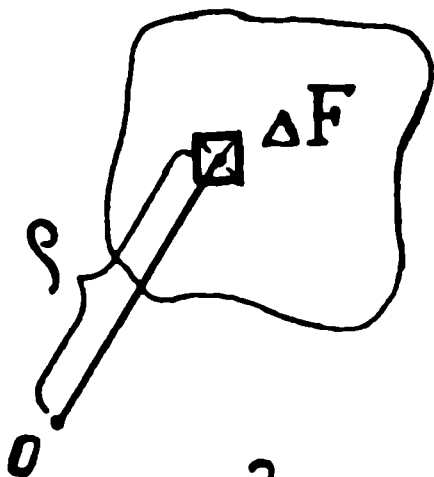
В формулу статического момента входит расстояние от ЦТ элементарной площадки до оси Ox или до оси Oy (см. рис. 3-а). Рассмотрим еще раз плоское сечение произвольной формы, т. к. для дальнейших рассуждений нас будут интересовать не только расстояния до осей, но и квадраты этих расстояний. Итак, нарисуем плоское сечение произвольной



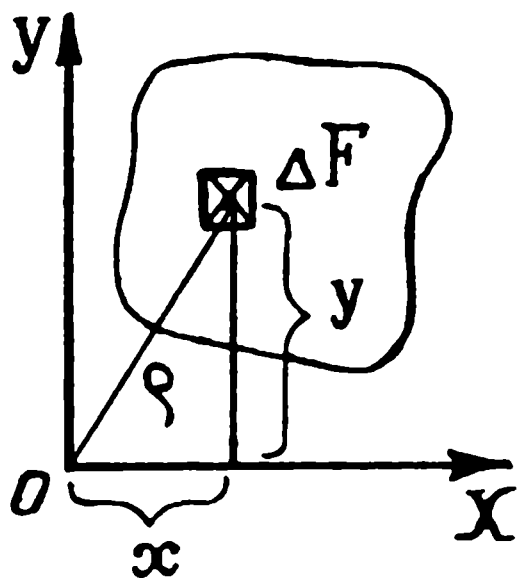
б.



в.



г.



д.

формы (рис. 3-б), мысленно в этом сечении выделим элементарную площадку ΔF (рис. 3-в), затем в любом месте в плоскости рассматриваемого сечения поставим произвольную точку O и соединим эту точку O , называемую полюсом, с центром тяжести элементарной площадки ΔF (рис. 3-г). Отрезок прямой ρ является переменным и по величине и по направлению, т. к. зависит от взаиморасположения элементарной площадки ΔF и точки O в плоскости нашего сечения.

Если через точку O провести две взаимно перпендикулярные прямые, то их можно принять за оси $x-x$ и $y-y$, а если на эти оси из ЦТ элементарной площадки ΔF опустить перпендикуляры, то получим координаты элементарной площадки ΔF в системе выбранных нами осей. Таким образом, x — расстояние от ЦТ элементарной площадки ΔF до оси $y-y$, y — то же расстояние, но только до оси $x-x$. Между ρ , x , y существует очень простая связь — ведь квадрат гипотенузы в прямоугольном треугольнике равен сумме квадратов катетов

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

Рис. 3-б, в, г, д

Обращаем внимание на то, что линейные размеры можно определить либо визуалью, либо с помощью инструментов, т. е. можно ориентировочно определить габариты декораций, высоту до галерей или колосников, размеры болта и его резьбы и эти же размеры можно уточнить с помощью рулетки, штангенциркуля, нутромера, теодолита и других приборов. Определение же площадей, статических моментов является чисто расчетными операциями, которые нужны для облегчения повседневного труда конструктора, технолога, экономиста при отборе тех или иных изделий, предметов.

Естественно, что при разработке конструкций необходимо грамотно и обоснованно решать вопросы прочности и жесткости конструкций, их целесообразности и экономичности. Грандиозное строительство, которое ведет человеческое сообщество за последние три века, выявило и сформулировало основные зависимости, влияющие на прочность и жесткость почти любых конструкций. Однако прежде чем перейти к изучению этих зависимостей, выводу формул и границ действия этих формул, сделайте сами небольшой опыт.

Возьмите рейсшину или тонкую линейку и положите ее края на опоры, наподобие балки моста, сначала плашмя, а потом поставьте на ребро. Слегка нажимая пальцем на рейсшину в средней части, вы сразу почувствуете, что в первом случае, плашмя, рейсшина легко прогнется от нажатия на нее пальцем, а во втором — на ребре — даже при сильном нажиме всей рукой, никакой видимой деформации не происходит из-за возросшей жесткости рейсшины. Какие выводы можно и нужно сделать из этого всем доступного опыта? Ведь знакомые нам геометрические характеристики — линейные размеры, площадь, статические моменты сечения — ничего не проясняют. В самом деле, величина линейных размеров B и h не изменяется (правда, изменяется их положение в пространстве — основание B , расположенное горизонтально, заменяя h , располагается вертикально). Площадь $F = B \times h$ и статические моменты вообще остаются постоянными при любом положении. Тогда за счет чего же возникает сопротивление рейсшины внешним нагрузкам, причем так явно, что даже нет необходимости прибегать к какой-либо измерительной технике — силомерам, прогибомерам и другим приборам.

Как можно догадаться, раз с помощью уже хорошо знакомых геометрических характеристик объяснить явление не удастся – необходимо искать новые зависимости, вводить новые понятия, разрабатывать такую методику расчета конструкций, которая создавала бы в нашей повседневной жизни возможности доказательно подтвердить (или столь же доказательно опровергнуть) смелые неординарные идеи, нестандартные предложения при разработке декораций или сценических эффектов, делая замыслы режиссеров, художников и других творческих работников реальными и при определенных условиях экономически оправданными.

2. ПОНЯТИЯ О МОМЕНТАХ ИНЕРЦИИ И МОМЕНТАХ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И МОМЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРОСТЫХ СЕЧЕНИЙ

Научные исследования, испытания образцов и моделей в лабораториях, практика строительства и эксплуатации различных конструкций выявили, что при сложной работе сооружений, в особенности при работе элементов на кручение и изгиб, расчеты на прочность и жесткость можно упростить введением новых понятий: моменты инерции плоских сечений (обозначается буквой – J – от латинск.) и моменты сопротивления плоских сечений (обозначается латинской буквой W – дубль-ве).

Вначале рассмотрим моменты инерции. Под моментом инерции плоского сечения понимают взятую по всему сечению сумму произведений элементарных площадок ΔF на квадрат их расстояний, либо до точки O , либо до осей $x-x$ или $y-y$, расположенных в плоскости сечения. Таким образом, в плоском сечении можно выделить несколько типов моментов инерции:

I ТИП – полярный момент инерции или момент инерции кручения, когда квадрат расстояния принимается до точки O , которую обычно называют полюсом. Тогда

$$J_{\rho} = \sum \rho_i^2 \Delta F_i = \rho_1^2 \Delta F_1 + \rho_2^2 \Delta F_2 + \rho_3^2 \Delta F_3 + \dots + \rho_n^2 \Delta F_n = \int \rho^2 dF;$$

II ТИП - осевые моменты, или моменты инерции изгиба. Поскольку осей в плоском сечении две, то и осевых моментов тоже два:

осевой момент инерции относительно оси x-x:

$$J_x = \sum y_i^2 \Delta F_i = y_1^2 \Delta F_1 + y_2^2 \Delta F_2 + y_3^2 \Delta F_3 + \dots + y_n^2 \Delta F_n = \int y^2 dF;$$

осевой момент инерции относительно оси y-y:

$$J_y = \sum x_i^2 \Delta F_i = x_1^2 \Delta F_1 + x_2^2 \Delta F_2 + x_3^2 \Delta F_3 + \dots + x_n^2 \Delta F_n = \int x^2 dF$$

III ТИП - центробежный момент инерции, который вычисляется относительно обеих взаимно перпендикулярных осей:

$$J_{xy} = \sum x_i y_i \Delta F_i = x_1 y_1 \Delta F_1 + x_2 y_2 \Delta F_2 + \dots + x_n y_n \Delta F_n = \int xy dF;$$

Все типы моментов инерции имеют одинаковую размерность - единицы длины в четвертой степени - см⁴.

Полярные и осевые моменты инерции всегда положительны (конечно, при условии, если площадь положительна), т. к. ρ , x , y входят в формулу в квадрате, а любая, даже отрицательная величина, возведенная в квадрат, положительна.

Центробежный момент инерции может быть величиной положительной, отрицательной и равной нулю в зависимости от знаков x , y , входящих в формулу этого момента инерции. Рассмотрим случай, когда центробежный момент инерции принимает значение 0. На рис. 4 ось y-y является осью симметрии поперечного сечения, и тогда для любой площадки ΔF , расположенной справа от оси y-y на расстояниях $x = a_1$, $y = b_1$ от осей, получим $J_{xy} = \Delta F_1 a_1 b_1$. Вследствие симметрии сечения всегда имеется площадка ΔF слева от оси y-y, для которой $x = -a_1$, $y = b_1$ и $-J_{xy} = -\Delta F_1 a_1 b_1$. Для каждой пары симметрично расположенных площадок относительно оси y-y сумма произведений $F_i x_i y_i$ равна нулю.

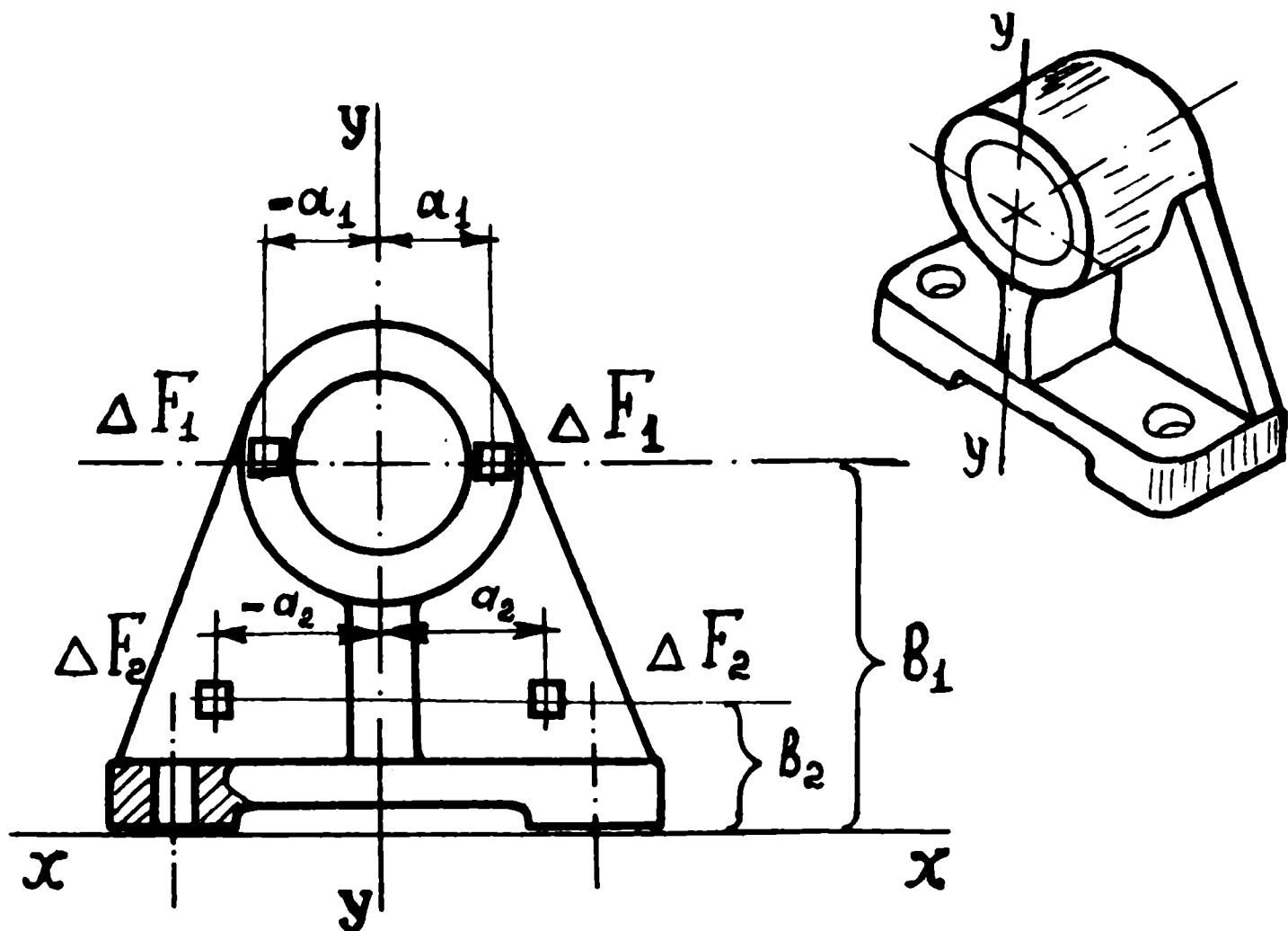


Рис. 4

Оси, относительно которых центробежный момент равен нулю, называют главными осями инерции. Если главные оси проходят через ЦТ сечения, то их называют главными центральными осями инерции. Учитывая, что нецентральные главные оси обычно редко встречаются в расчетах, слова "центральные" и "инерции" зачастую опускают.

В дальнейшем при расчете конструкций будут рассматриваться сечения, имеющие не менее одной оси симметрии. Если сечение имеет одну ось симметрии, то она является одной из главных осей инерции. Вторая главная ось проходит перпендикулярно оси симметрии через ЦТ сечения. При наличии в сечении двух осей симметрии обе являются главными центральными осями. Центробежные моменты относительно этих осей всегда будут равны нулю.

Между полярными и осевыми моментами инерции существует взаимозависимость. Если в формуле полярного момента заменить величину

$$\rho^2 \text{ его составляющими, то } J_{\rho} = \sum^F \rho^2 \Delta F = \sum^F (x^2 + y^2) \Delta F = \\ = \sum^F x^2 \Delta F + \sum^F y^2 \Delta F = J_y + J_x;$$

Таким образом, $J_{\rho} = J_x + J_y = \text{const}$; т. е. полярный момент инерции сечения относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку. Эту зависимость обычно используют для упрощения расчетов моментов инерции.

Если даже повернуть оси $x-x$ и $y-y$ на какой-то угол α , то формула не изменится, т. к. величина ρ в данном случае постоянна. Величины J_x и J_y будут изменяться по величине, но так, что их сумма все время будет оставаться постоянной величиной (рис. 5). Следовательно, в конструкциях нужно и можно добиваться такого положения, при котором один из осевых моментов достигал бы своего максимума и обеспечивал бы высокую сопротивляемость конструкции внешним нагрузкам.

Для закрепления знакомства с моментами инерции приведем несколько практических расчетов, используя формулы таблицы рис. 6 (выводы формул вынесены в Приложение I и студентам необходимо ознакомиться с математическими приемами перехода от общего вида к конкретным частным случаям).

Пример I. Определить полярный момент инерции круглой трубы 60 x 55 мм.

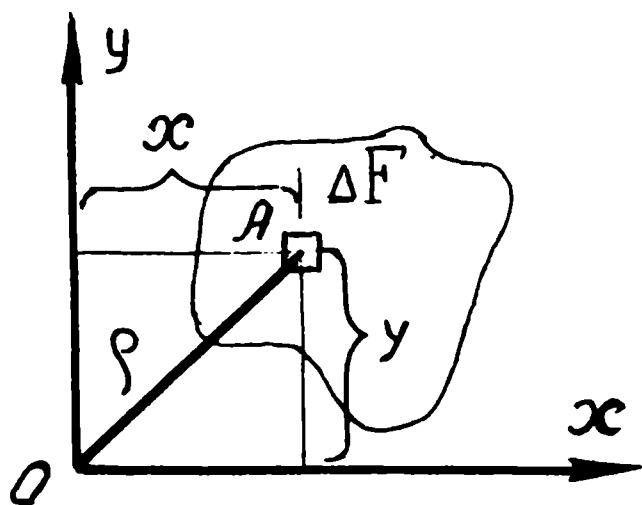
Решение: по таблице рис. 6 в графе 6 находим формулу полярного момента инерции для кольца:

$$J_{\rho} = 0,1 D^4 (1 - \alpha^4) = 0,1 \cdot 6,0^4 (1 - 0,70) = 38,9 \approx 39 \text{ см}^4,$$

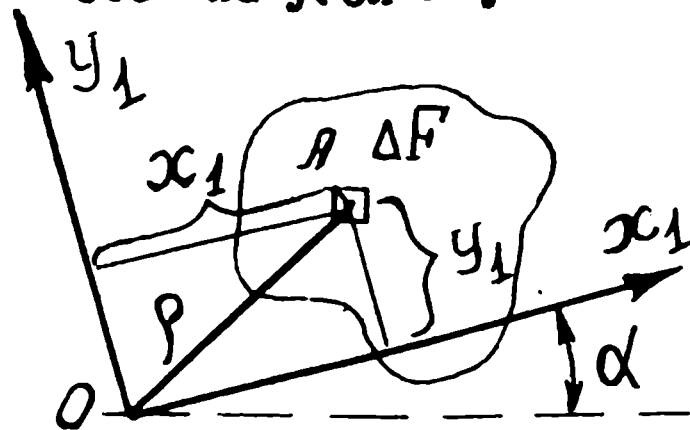
где J_{ρ} - полярный момент инерции трубы, см⁴;

D - наружный диаметр трубы, см;

Положение до поворота осей.



Положение после поворота осей на угол α.

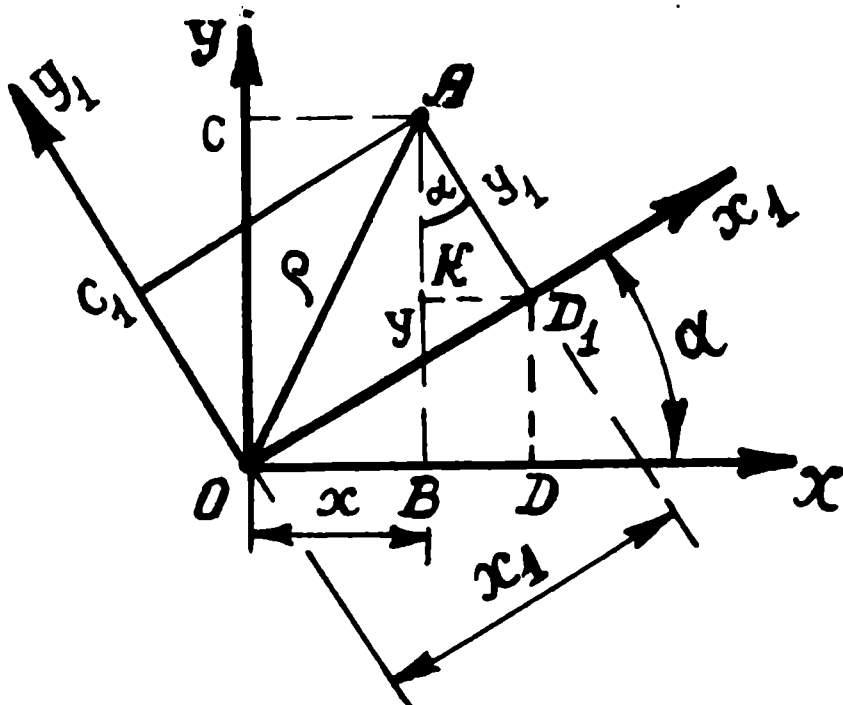


СОВМЕЩЕННОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ОСЕЙ.

Взаимозависимость координат элементарной площадки ΔF при неизменном полюсе в точке O.

$$OA^2 = OB^2 + AB^2 = OD_1^2 + AD_1^2; \rho^2 = x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2 = const;$$

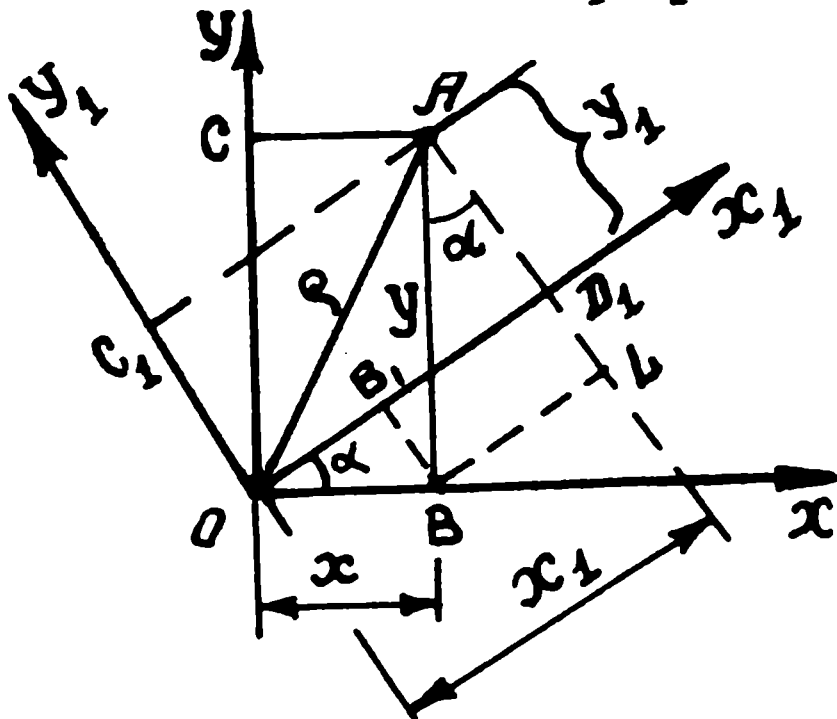
Определение координат x и y при заданных величинах x_I, y_I и α.



$$x = OB = OD - BD = x_I \cos \alpha - y_I \sin \alpha;$$

$$y = AB = BK + AK = x_I \sin \alpha + y_I \cos \alpha;$$

Определение координат x_I, y_I при заданных величинах x, y и α.



$$x_I = OD_1 = OB_1 + B_1D_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha;$$

$$y_I = OC_1 = D_1A = LA - D_1L = y \cos \alpha - x \sin \alpha;$$

Рис. 5.

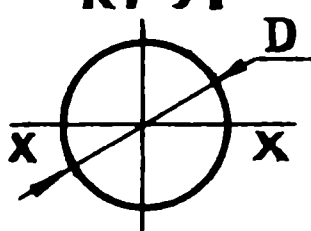
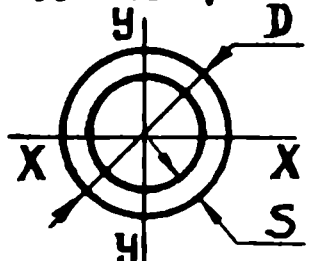
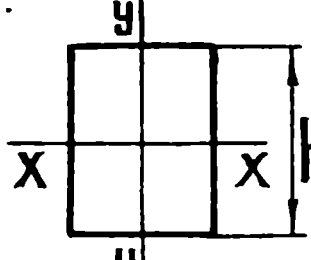
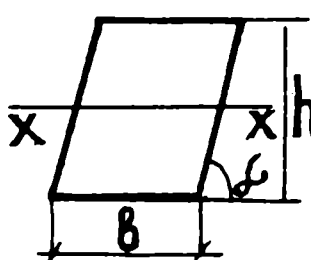
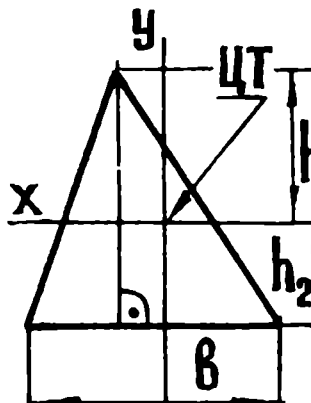
№ п/п	тип сечения, форма	Геометр. характеристики сечений:					ПРИМЕЧАН.
		РАЗМЕР	F	S	J	W	
		см	см ²	см ³	см ⁴	см ³	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	<p>КРУГ</p> 	D	$0,785D^2$	—	$J_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32}$ $J_x = \frac{\pi D^4}{64}$	$W_p = \frac{\pi D^3}{16}$ $W_x = \frac{\pi D^3}{32}$	$J_x = J_y = \frac{J_p}{2}$
2	<p>КОЛЬЦО</p> 	D, d, S $\alpha = \frac{d}{D}$	$0,785D^2 \times (1 - \alpha^2)$	—	$J_p = 0,1 \times D^4 \times (1 - \alpha^4)$ $J_x = \frac{0,05 D^4}{(1 - \alpha^4)}$	$W_p = 0,05 D^3 \times (1 - \alpha^4)$ $W_x = \frac{0,05 D^3}{(1 - \alpha^4)}$	$W_p = \frac{J_p}{D/2}$ $W_x = \frac{J_x}{D/2}$
3	<p>ПРЯМОУГОЛЬНИК</p> 	B, h	$B \times h$	—	$J_x = \frac{Bh^3}{12}$ $J_y = \frac{hB^3}{12}$	$W_x = \frac{Bh^2}{6}$ $W_y = \frac{hB^2}{6}$	$W_x = \frac{J_x}{h/2}$ $W_y = \frac{J_y}{B/2}$
4	<p>ПАРАЛЛЕЛОГРАММ</p> 	B, h α	$B \times h$	—	$J_x = \frac{Bh^3}{12}$	$W_x = \frac{Bh^2}{6}$	
5	<p>ТРЕУГОЛЬНИК</p> 	a, b, c, h $h = h_1 + h_2$ $h_2 = \frac{1}{3} \cdot h$	$\frac{1}{2} B \times h$	—	$J_x = \frac{Bh^3}{36}$ $J_{x_1} = \frac{Bh^3}{12}$	$W_x^I = \frac{Bh^2}{24}$ $W_x^{II} = \frac{Bh^2}{12}$	$h_1 = \frac{2}{3}h$
6	прокатные профили	Все справочные данные приводятся в ГОСТ и справочниках...					

Рис. 6

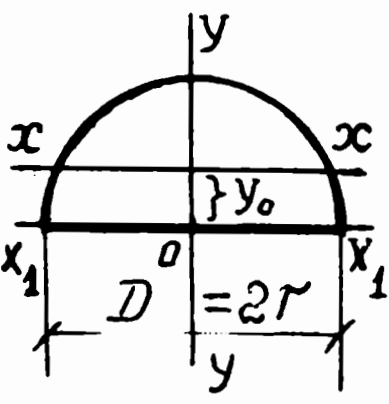
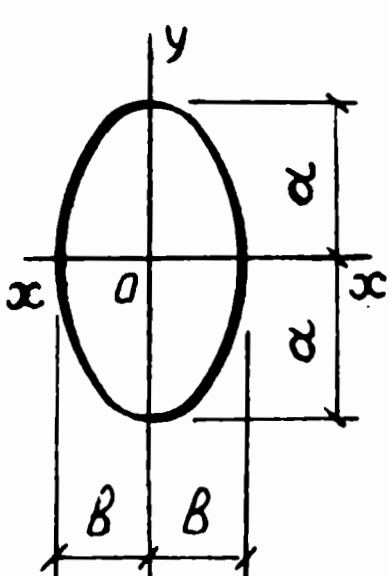
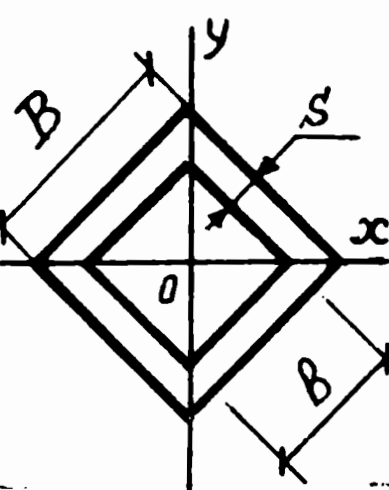
№№ п/п	Т И П сечения, форма	Геометрические характеристики сечений				Приме- чания
		раз- мер	F	J	W	
		см	см ²	см ⁴	см ³	
Г	2	3	4	5	6	7
Г	Полукруг 	D	$\frac{\pi D^2}{8}$	$J_x = 0,11 r^4,$ $J_y = 0,25 D^4.$	$W_x = 0,024 D^3,$ $W_y = 0,05 D^3$	$y_0 = 0,21 D$
2	э л л и п с. 	a, b	$\pi a \cdot b$	$J_x = 0,785 b \cdot a^3,$ $J_y = 0,785 a \cdot b^3.$	$W_x = 0,785 x$ $\times b \cdot a^2,$ $W_y = 0,785 x$ $\times a \cdot b^2;$	—
3	К В А Д Р А Т, поставленный на ребро. 	B, B	$B^2 - B^2$	$J_x = J_y =$ $= \frac{B^4 - B^4}{12};$	$W_x = W_y =$ $= \frac{B^4 - B^4}{6 \sqrt{12} B};$	$s = B - B$

Рис. 6-а

$\alpha = \frac{d}{D}$ - отношение внутреннего и внешнего диаметров трубы;

$$\alpha = \frac{d}{D} = \frac{55}{60} = 0,91, \quad \alpha^2 = 0,84; \quad \alpha^4 = 0,70;$$

Пример 2. Для прутка диаметром 25 мм определить полярные и осевые моменты инерций.

Решение:

$$J_p = 0,1 \cdot D^4 = 0,1 \cdot 2,5^4 = 0,1 \cdot 39,06 \approx 3,9 \text{ см}^4;$$

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{0,1 \cdot D^4}{2} = 0,05 D^4;$$

$$J_x = 0,05 D^4 = 0,05 \cdot 2,5^4 = 0,05 \cdot 39,06 = 1,95 \text{ см}^4;$$

Пример 3. Для рейшины размерами поперечного сечения $b = 4$ мм, $h = 50$ мм определить осевые моменты инерции.

Решение:

$$J_x = \frac{b h^3}{12} = \frac{0,4 \times 5,0^3}{12} = \frac{0,4 \times 125}{12} = 4,166 \approx 4,17 \text{ см}^4;$$

$$J_y = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{5,0 \times 0,4^3}{12} = \frac{5,0 \times 0,064}{12} = 0,266 \approx 0,27 \text{ см}^4;$$

Из расчета становится ясным, почему в положении плашмя рейшина легко прогибается (осевой момент инерции очень мал и со-

ставляет в этом случае $0,27 \text{ см}^4$), а при положении на ребре момент инерции сечения составляет $4,17 \text{ см}^4$, т. е. жесткость возрастает в

$$\frac{4,17}{0,27} = 15,7 \text{ раза.}$$

В технических расчетах для оценки прочности балок и валов часто используют еще одну геометрическую характеристику плоского сечения — момент сопротивления: отношение момента инерции этого сечения к расстоянию от ЦТ сечения до наиболее удаленной точки или волокна этого же сечения. Различают полярный момент сопротивления, W_p , осевые моменты сопротивления W_x, W_y .

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}; \quad W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}},$$

где ρ_{\max} = максимальное расстояние от полюса-точки O до крайнего волокна сечения. Для круга и кольца

$$\rho_{\max} = D/2;$$

y_{\max} = максимальное расстояние от оси x-x до крайних волокон сечения;

x_{\max} = максимальное расстояния от оси y-y до крайних волокон сечения.

Моменты сопротивления имеют размерность единиц длины в третьей степени — см^3 .

Хочется еще раз напомнить, что моменты сопротивления, так же, как и моменты инерции и другие геометрические характеристики сечения, являются чисто расчетными понятиями. Поэтому размерность момента сопротивления плоского сечения в см^3 не должна ассоциироваться ни с объемом тела, ни со статическими моментами.

Определять моменты сопротивления простейших сечений можно по формулам, приведенным в графе 7 таблицы на рис. 6. Выводы формул вынесены в Приложение I.

Пример 4. Для рейшины с размерами $B = 4$ мм, $h = 50$ мм определить осевые моменты сопротивления.

Решение: Из графы 7 рис. 6 для прямоугольника находим

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{B h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{B h^2}{6} =$$
$$= \frac{0,4 \times 5^2}{6} = 1,67 \text{ см}^3;$$

$$W_y = \frac{J_y}{x_{\max}} = \frac{h \cdot B^3 \cdot 2}{12 \cdot B} = \frac{h B^2}{6} =$$
$$= \frac{5 \times 0,4^2}{6} = 0,13 \text{ см}^3.$$

Из приведенного расчета видно, что при положении "на ребре" (момент сопротивления относительно оси $x-x$) рейшина имеет резервы сопротивления внешним нагрузкам в 12 — 13 раз выше, чем при положении "плашмя" (момент сопротивления относительно оси $y-y$), т. к. соотношение

$$\frac{W_x}{W_y} = \frac{1,67}{0,13} = 12,8 \approx 13.$$

Пример 5. Сравнить геометрические характеристики двух вариантов сечений балок, показанных на рис. 7 и рекомендовать балку с максимальным сопротивлением вертикальным нагрузкам при условии, что длины балок, их наружные размеры одинаковы и оси симметрии наружного прямоугольника совпадают с осями симметрии внутренних отверстий.

Решение: Для выбора сечения с максимальным сопротивлением вертикальным нагрузкам достаточно сравнить моменты сопротивления балок относительно оси $x-x$. Вычисление момента сопротивления такого составного сечения требует предварительного определения осевого момента инерции относительно той же оси $x-x$ *)

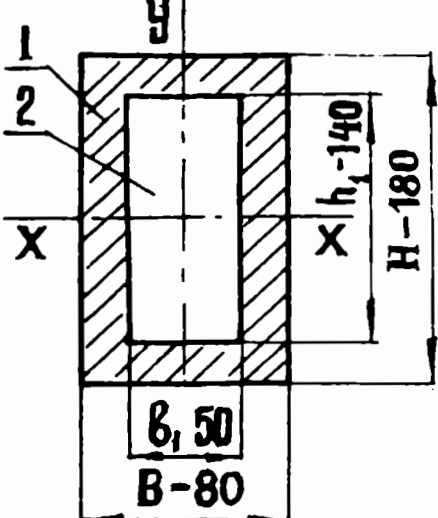
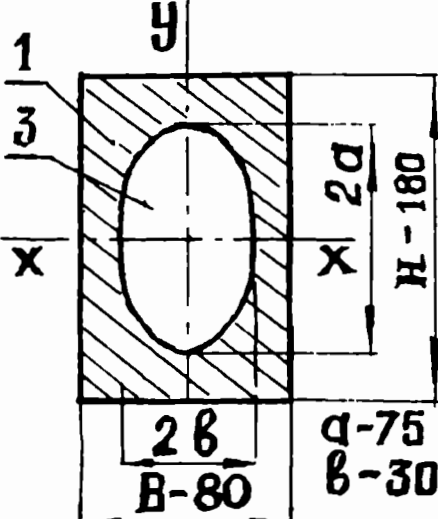
Т. к. по заданию оси симметрии отверстий совпадают с осями симметрии прямоугольника, то моменты инерции заданных балок можно определять как моменты инерции наружного прямоугольника, исключив моменты инерции отверстий.

*) Хочется предостеречь от очень распространенной ошибки в расчетах, когда момент сопротивления составной фигуры определяют как разности моментов сопротивления составляющих фигур.

Так, для I варианта ошибочно пишут:

$$W_x^I - W_x^2 = \frac{B \times H^2}{6} - \frac{b \times h^2}{6} = \frac{8 \times 18^2}{6} - \frac{5 \times 14^2}{6} = 432 - 163 = 269.$$

Полученный набор случайных цифр ни в коей степени не соответствует понятию "момент сопротивления сечения".

Геометр. характеристики сечений балок						
Варианты сечен. балок	ФОРМА СЕЧЕН. БАЛОК РАЗМЕРЫ	ПЛОЩАДЬ СЕЧЕНИЯ	Ось X-X		Ось Y-Y	
			МОМЕНТ ИНЕРЦИИ	МОМЕНТ СОПРОТ.	МОМЕНТ ИНЕРЦИИ	МОМЕНТ СОПРОТ.
			F	J _x	W _x	J _y
ММ	СМ ²	СМ ⁴	СМ ³	СМ ⁴	СМ ³	
I-I		74	2745,0	305	622	156
II-II		73,6	2894	322	609	152

Примечания и расчеты: I сечение - площадь балки
 $F_1 = F_1 - F_2 = B \times H - b \times h_1 = 8 \times 18 - 5 \times 14 = 144 - 70 = 74,0 \text{ см}^2;$
 $J_y = J_y^1 - J_y^2 = \frac{H \cdot B^3}{12} - \frac{h_1 \cdot b^3}{12} = \frac{18 \cdot 8^3}{12} - \frac{14 \cdot 5^3}{12} = 768 - 146 =$
 $= 622 \text{ см}^4;$ $W_y = \frac{J_y}{B/2} = \frac{622}{4} \approx 156 \text{ см}^3$

II сечение площади балки
 $F_2 = F_1 - F_3 = B \times H - \pi \cdot a \cdot b = 8 \cdot 18 - 3,14 \cdot 7,5 \cdot 3,0 = 144 - 70,65 = 73,35 \text{ см}^2$
 $J_y = J_y^1 - J_y^3 = \frac{H \cdot B^3}{12} - 0,785 \cdot a \cdot b^3 = \frac{18 \cdot 8^3}{12} - 0,785 \cdot 7,5 \cdot 3,0^3 =$
 $= 768 - 159 = 609,0 \text{ см}^4;$ $W_y = \frac{J_y}{B/2} = \frac{609}{4} = 152,0 \text{ см}^3$

Рис. 7

Для первой балки:

$$J_x = J_x^I - J_x^2 = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b_I h_I^3}{12} =$$
$$= \frac{8 \times 18^3}{12} - \frac{5 \times 14^3}{12} = 3888 - 1143 = 2745 \text{ см}^4;$$

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\text{max}}} = \frac{J_x}{H/2} = \frac{2745}{9} = 305 \text{ см}^3;$$

Для второй балки:

$$J_x^{\text{II}} = J_x^I - J_x^3 = \frac{B \times H^3}{12} - 0,785 \cdot a^3 \cdot B =$$
$$= \frac{8 \times 18^3}{12} - 0,785 \times 7,5^3 \times 3,0 = 3888 - 994 = 2894 \text{ см}^4;$$

$$W_x^{\text{II}} = \frac{J_x^{\text{II}}}{H/2} = \frac{2894}{9} = 322 \text{ см}^3,$$

где

$$J_x^I = \frac{B \times H^3}{12}$$

- осевой момент инерции наружного прямоугольника, см⁴;

$$J_x^2 = \frac{b \times h^3}{12}$$

- осевой момент инерции прямоугольного отверстия, см⁴;

$$J_x^3 = \frac{\pi \cdot a^3 b}{4}$$

- осевой момент инерции эллипса, см⁴;

a - большая полуось эллипса, см,

b - малая полуось эллипса, см;

y_{max}

- наибольшее расстояние от оси x-x до (верхнего) крайних волокон сечения, см. В силу симметрии сечения расстояния от оси x-x до верхнего и нижнего волокон одинаковы,

$$y_{\max} = \frac{H}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ см.}$$

Расчеты, сведенные в таблицу на рис.7, наглядно показывают, что при практически равновеликих площадях сечений (расхождение всего 0,8%) моменты сопротивления второй балки примерно на 6% больше первой балки. Таким образом, предпочтение следует отдать второму типу балки, если есть технологические возможности выполнения эллипсовидного отверстия.

В примере на рис. 2 рассматривался вопрос о выборе типа трубы с наименьшими затратами материала. Вернемся к этим исходным данным и определим вариант трубы, отвечающий максимальной жесткости и максимальной прочности при вертикальных нагрузках. Результаты расчетов также проще всего рассматривать в виде таблицы (см. рис. 8):

№ вари-ан-тов	Тип трубы, сечение, размеры	Площадь сечения $F, \text{см}^2$	Моменты инерции, $J_x \text{ см}^4$	Моменты сопротивления, $W_x \text{ см}^3$	Примечания, расчеты $J_x = 0,05 D^4 \cdot (1 - \alpha^4);$ $W_x = J_x / 0,5 D;$
1.	Прямоуголь-ная труба 40x25x2 мм	2,44	5,17	2,5	$J_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{8h^3}{12} = 5,168,$ $W_x = \frac{5,17}{2,0} = 2,58 \sim 2,6,$
2.	Водогазопро-водная труба 33,5 x 27,9 x 2,8	2,70	3,27	1,95	$J_x = 0,05 \cdot 3,35^4 (1 - 0,48) = 3,27;$ $W_x = \frac{3,27 \cdot 2}{3,35} = 1,95 \text{ см}^3$
3.	Труба тонко-стенная 60x57 $\xi = 1,5$	2,76	12,0	4,0	$J_x = 0,05 \cdot 6,0^4 \cdot (1 - 0,81) = 12,0$ $W_x = \frac{12,02 \cdot 2}{6,0} = 4,0 \text{ см}^3$
4.	Труба 40 x 35 $\xi = 2,5 \text{ мм}$	2,94	5,3	2,65	$J_x = 0,05 \cdot 4^4 (1 - 0,59) = 5,30;$ $W_x = \frac{5,3 \cdot 2}{4,0} = 2,648 \approx 2,65;$
5.	Труба тонко-стенная 60 x 57,5 $\xi = 1,25 \text{ мм}$	2,26	10,4	3,50	$J_x = 0,05 \cdot 6,0^4 \cdot (1 - 0,84) =$ $= 0,05 \cdot 1296 \cdot 0,16 = 10,4;$ $W_x = \frac{10,4 \cdot 2}{6,0} \approx 3,50 \text{ см}^3;$

Рис. 8

Как видно, по соображениям жесткости и прочности предпочтение следует отдать трубе с наружным диаметром 60 мм. При этом, если толщина стенки 1,5 мм (вариант 3), то по сравнению с вариантом I расход материала увеличивается на

$$13\% \left(\frac{2,76 - 2,44}{2,44} \times 100 = 13,1\% \right), \text{ момент инерции, влияющий}$$

на жесткость балки, возрастает в $\frac{12,02}{5,17} = 2,3$ раза, а

момент сопротивления, влияющий на прочность, возрастает в

$$\frac{4,0}{2,6} = 1,54 \text{ раза.}$$

Если при наружном диаметре 60 мм толщину стенки принять

$S = 1,25$ мм (вариант 5), то можно расход материала сократить

на $\frac{2,26 - 2,44}{2,44} \times 100 = -7,4\%$, а момент инерции и

моменты сопротивления по сравнению с вариантом I будут соответственно выше в 2,0 и 1,35 раза.

Выбор оптимального варианта зависит от назначения конструкций и ряда других факторов, которые необходимо уметь вычислять, анализировать при разработке конструкций театральных декораций.

Пример 6. Для равнобедренного треугольника с основанием $b = 5$ см и высотой $h = 9$ см определить геометрические характеристики относительно оси $x-x$, проходящей через ЦТ сечения параллельно основанию (см. рис. 9).

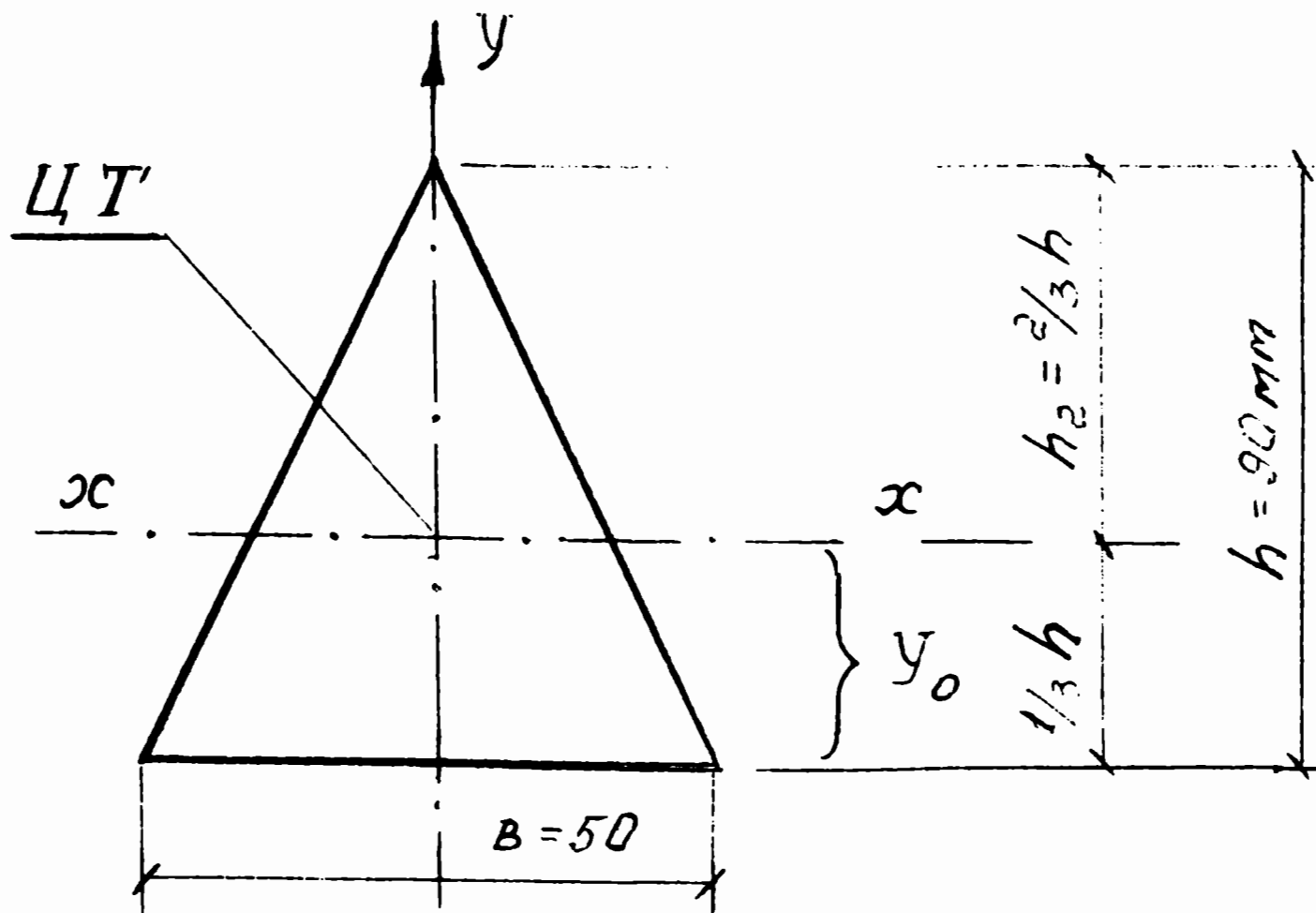


Рис. 9.

Решение: I. Определяем площадь сечения

$$F = \frac{1}{2} b h = 0,5 \times 5 \times 9 = 22,5 \text{ см}^2.$$

2. Определяем осевой момент инерции относительно оси $x-x$, проходящей через ЦТ сечения параллельно основанию треугольника по формуле (см. таблицу на рис. 6).

$$J_x = \frac{b x h^3}{36} = \frac{5 \times 9^3}{36} = 101,25 \text{ см}^4.$$

3. Определяем осевые моменты сопротивления сечения. Ввиду того, что ЦТ треугольника расположен на высоте $h_1 = 1/3$ от основания, то до вершины треугольника от оси $x-x$ остается $h_2 = 2/3 h$, т.е. 6 см. Таким образом, необходимо определить в

несимметричном сечении два момента сопротивления:

$$W_x^I = \frac{J_x}{2/3 h} = \frac{101,25}{6,0} = 16,875 = 16,9 \text{ см}^3;$$

$$W_x^{II} = \frac{J_x}{1/3 h} = \frac{101,25}{3,0} = 33,75 = 33,8 \text{ см}^3,$$

где

W_x^I - осевой момент сопротивления при расстоянии
 $y_{\max} = h_2 = \frac{2}{3} h$ от оси x-x до

вершины треугольника;

W_x^{II} - осевой момент сопротивления при расстоянии
 $y_{\max} = h_1 = \frac{1}{3} h$ от оси x-x до

основания треугольника.

Применение в театральной практике металлоконструкций подчас довольно сложных конфигураций требует умения и определенных навыков работы с ГОСТами и разнообразными справочниками.

Пример 7. Определить основные геометрические размеры, положение ЦТ, моменты инерции и моменты сопротивления стального равнополочного уголка № 2,8 ГОСТ 8509-72 (рис. 10).

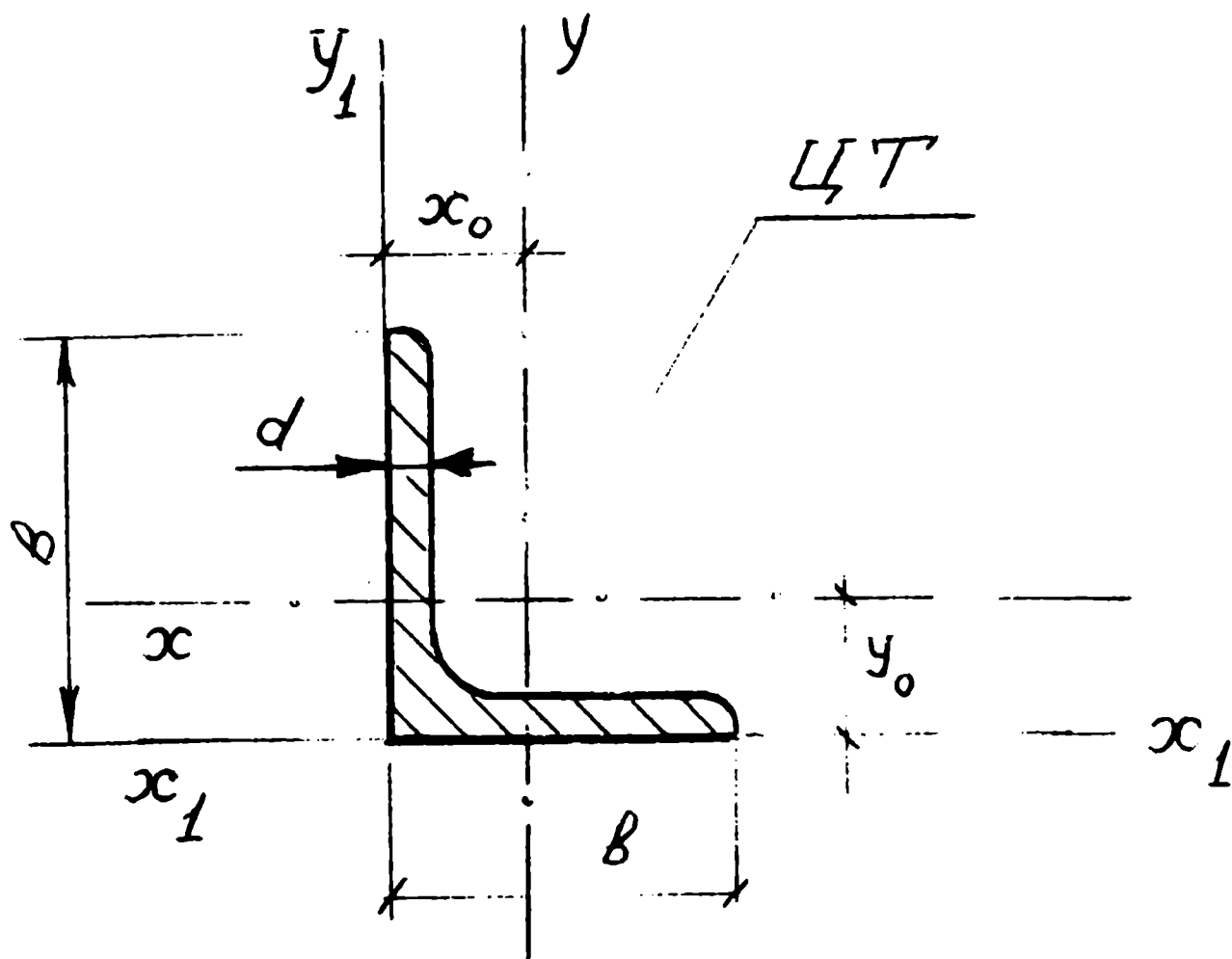


Рис. 10

Решение: Из ГОСТ 8509-72 для заданного профиля № 2,8 можно выписать:

основные размеры - 28 x 28 x 3 мм

площадь сечения $F = 1,62 \text{ см}^2$

масса профиля $q = 1,27 \text{ кг/пог. м}$

расстояние от наружной стороны полки до ЦТ сечения (расстояние между осями x_1-x_1 и $x-x$) $y_0 = 0,80 \text{ см}$

момент инерции сечения относительно оси $x-x$ $J_x = 1,16 \text{ см}^4$.

В ГОСТе приведены моменты инерции сечения относительно и других осей, но не приведены моменты сопротивления сечения, которые необходимо вычислить:

$$W_x^I = \frac{J_x}{y_0} = \frac{1,16}{0,8} = 1,45 \text{ см}^3;$$

$$W_x^{II} = \frac{J_x}{b - y_0} = \frac{1,16}{2,8 - 0,8} = 0,575 \approx 0,58 \text{ см}^3;$$

Если понятия моментов инерции и моментов сопротивления, их расчеты для сечения простых форм усвоены, то можно перейти к определениям моментов инерций и моментов сопротивления сложных форм сечений.

3. ОБЩИЕ СПОСОБЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИЙ СЛОЖНЫХ СЕЧЕНИЙ

Для определения площадей сечений сложной формы это сечение обычно расчленяют на такие простые формы, площади которых можно вычислять без особых затруднений. Площадь сечения сложной формы получается суммированием (интегрированием) площадей составляющих фигур. Руководствуясь этими соображениями, можно вычислять и моменты инерции сложных фигур.

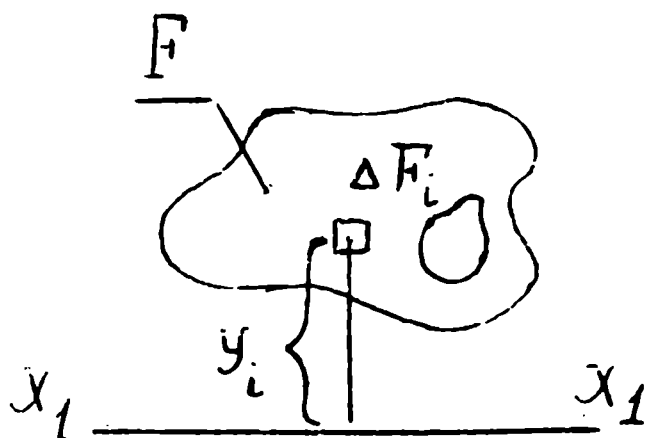
Представим себе произвольное сечение любой сложной формы и в плоскости этого сечения проведем произвольную ось x_1 . В общем виде осевой момент инерции такой фигуры по данному выше определению момента инерции следует записать:

$$J_{x_1} = \sum y_i^2 \Delta F \quad \text{или} \quad J_{x_1} = \int y_i^2 dF ;$$

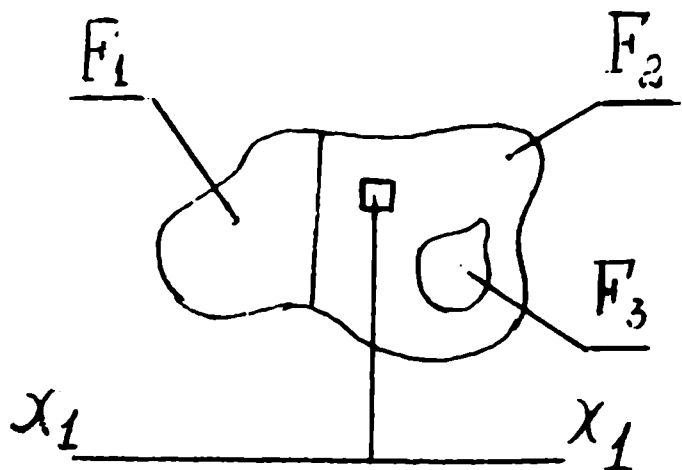
т. е. осевой момент инерции сечения сложной формы J_{x_I}

представляет собой сумму произведений элементарных площадок ΔF на квадрат расстояний от ЦТ каждой элементарной площадки до рассматриваемой оси (в данном случае до оси $x_I - x_I$) (рис. II-а).

Если разбить сложную форму сечения площадью F на несколько частей, например, F_1, F_2, F_3 (рис. II-б), то осевые моменты инерции каждой части в сумме дают момент инерции всей сложной фигуры:



а



б.

$$J_{x_I} = J_{x_I}^1 + J_{x_I}^2 + J_{x_I}^3,$$

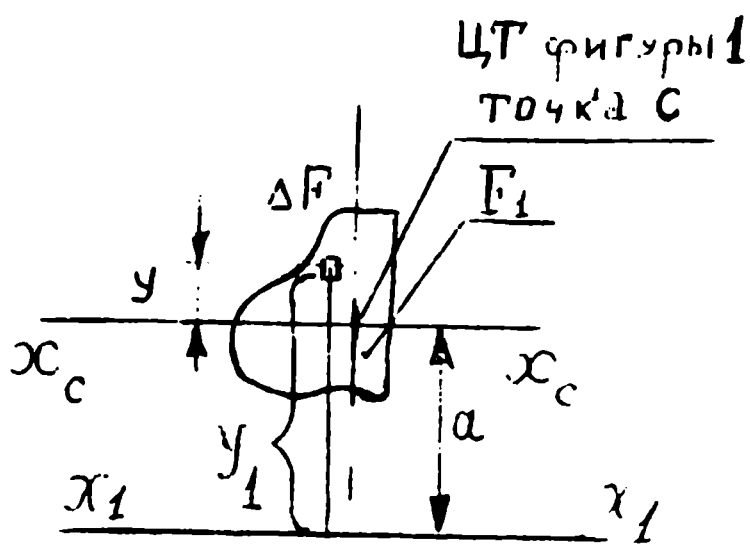
где

$$J_{x_I}^1 = \sum F_1 y^2 \Delta F$$

- момент инерции первой части сечения относительно оси $x_I - x_I$;

$$J_{x_I}^2 = \sum F_2 y^2 \Delta F$$

- момент инерции второй части сечения относительно оси $x_I - x_I$;



в

Рис. II

$$\left(-J_{x_1}^3 \right) = \sum y^2 \Delta F$$

- момент инерции третьей части сечения относительно оси $x_I - x_I$; в сечении имеется отверстие, поэтому площадь сечения включается в расчет со знаком минус.

Таким образом, момент инерции сложной фигуры относительно любой оси равен сумме моментов инерции составных ее частей относительно той же оси. Разбивка на части была произведена произвольно и для сокращения объема вычислений, естественно, нужно стремиться к минимальному их числу. На какие же части лучше делить сложную фигуру? Как определить моменты инерции каждой части относительно произвольной оси $x_I - x_I$?! Рекомендации по разбивке сложной фигуры на части даны при решении примеров, а вычисление моментов инерции относительно любой оси рассмотрим применительно к первой части выбранного сечения (рис. II-в).

Предварительно напомним, что положение ЦТ для любого сечения можно легко определить, используя статические моменты плоского сечения. Напомним также, что ЦТ - замечательная точка, которая не меняет своего положения при любом повороте сечения. Через эту точку можно провести любое количество осей под любым наклоном.

Выберем такую ось $x_C - x_C$, которая проходила бы через ЦТ выбранной нами части сечения и была бы параллельна заданной оси $x_I - x_I$. Попробуем теперь определить момент инерции этой части сечения относительно произвольной оси $x_I - x_I$ при следующих исходных данных:

- $x_I - x_I$ - произвольная заданная ось;
- $x_C - x_C$ - центральная ось части фигуры (ось $x_C - x_C$ проведена параллельно оси $x_I - x_I$ через ЦТ части сечения);
- a - расстояние между осями;
- y - расстояние от оси $x_C - x_C$ до элементарной площадки ΔF ;

y_I - расстояние от оси $x_I - x_I$ до элементарной площадки ΔF ;

$J_{x_c}^I$ - момент инерции первой части сечения относительно центральной оси $x_c - x_c$. В общем виде

$$J_{x_c}^I = \sum F_i y^2 \Delta F .$$

Требуется определить осевой момент инерции первой части фигуры относительно оси $x_I - x_I$.

В общем виде осевой момент инерции относительно оси $x_I - x_I$

$$J_{x_1}^I = \sum F_i y_1^2 \Delta F$$

, но $y_1 = y + a$. Подставляя значение

$y_I = y + a$, получаем:

$$J_{x_1}^I = \sum F_i (y + a)^2 \Delta F =$$

$$= \sum F_i (y^2 + 2ay + a^2) \Delta F = \sum F_i y^2 \Delta F + \sum 2ay \Delta F + \sum F_i a^2 \Delta F =$$

$$= \sum F_i y^2 \Delta F + 2a \sum F_i y \Delta F + a^2 \sum F_i \Delta F$$

Рассмотрим каждый из трех членов уравнения:

Первый член вида $\sum F_i y^2 \Delta F$ представляет собой момент

инерции первой части сечения относительно центральной оси $x_c - x_c$, вычисление которых было освоено в предыдущих примерах.

В таблице на рис. 6 даны формулы, по которым легко определить моменты инерции простых по форме фигур. Моменты инерции прокатных профилей даны в ГОСТ.

Второй член вида $2a \sum \frac{F_i}{y} \Delta F$ представляет собой статический момент относительно той же оси (центральной оси $x_c - x_c$); величина его равна нулю, т. к. ось $x_c - x_c$, напомним, проходит через ЦТ рассматриваемой части сечения. Второй член уравнения превращается в нуль.

Третий член вида $a^2 \sum \Delta F$ представляет собой "произведение квадрата расстояния "а" на сумму элементарных площадок, взятых по всей площади рассматриваемой части сечения", или просто площадь первой части сечения.

Таким образом,

$$J_{x_1}^1 = J_{x_c}^1 + a^2 F$$

т. е. момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, проведенной параллельно заданной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между этими осями.

Применение выведенной формулы рассмотрим на примерах.

Пример 8. Определить осевые моменты инерции и сопротивления балки, поперечные размеры которой приведены на рис. 12-а.

Решение: Заданное сечение симметрично, и в силу симметрии сечения расчета положения главных центральных осей не требуется. Проводим оси симметрии $x-x$ и $y-y$. Точка их пересечения - ЦТ всего сечения.

Рассматривая поперечное сечение, видим, что оно сформировалось из четырех фигур - внешнего прямоугольного контура размерами $B = 8,0$ см, $H = 18,0$ см, площадью $F = 144$ см² и трех отверстий - центрально расположенного прямоугольного отверстия $b_2 = 6,0$ см, $h_2 = 2,0$ см, площадью 12 см² и двух

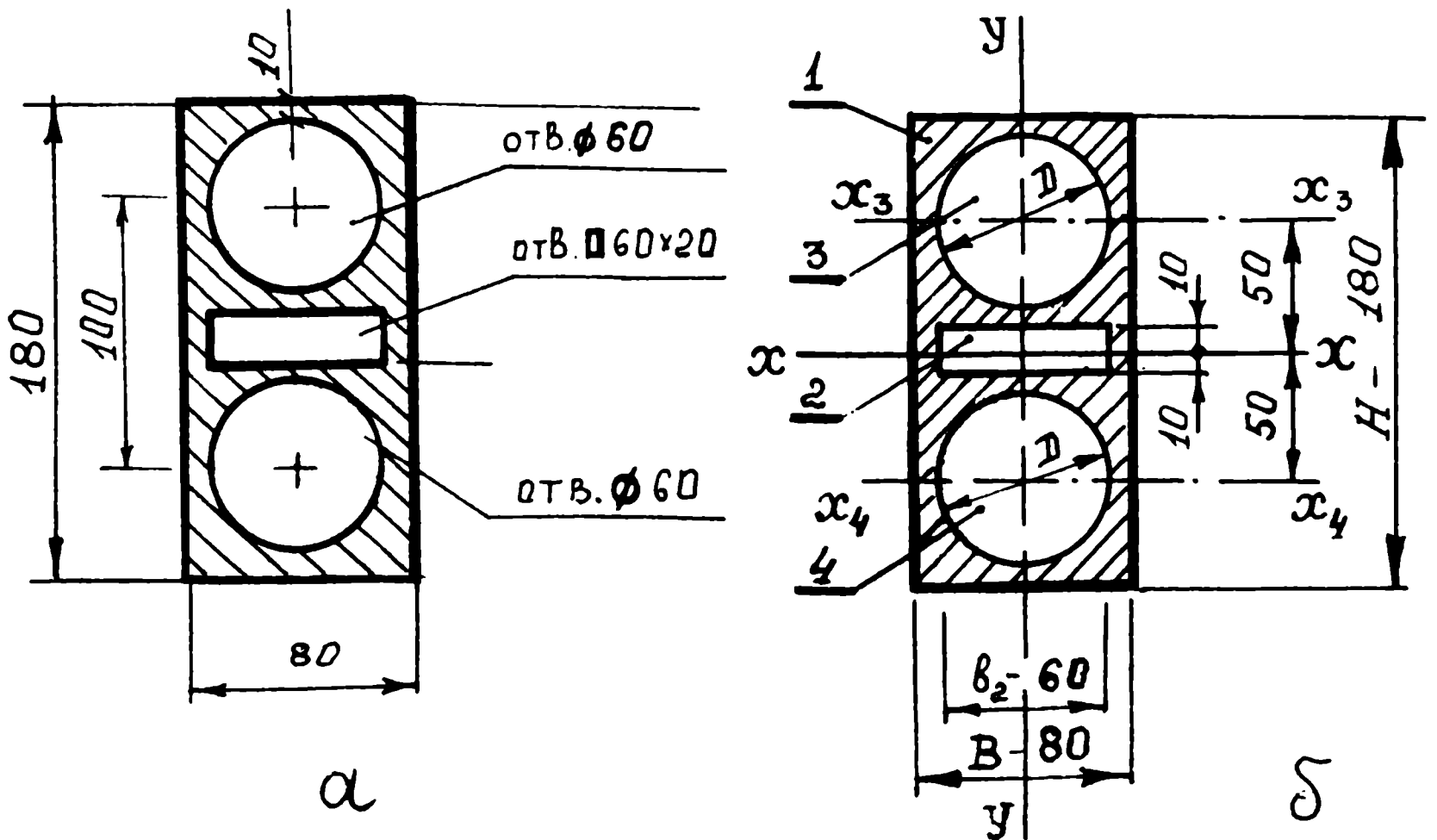


Рис. 12

круглых отверстий диаметром 6,0 см, центры которых равноудалены от оси x-x на 5,0 см. Площадь каждого круглого отверстия

$F = 0,785 \times D^2 = 0,785 \times 6^2 = 28,26 \text{ см}^2$. Центр круга - центр тяжести круглого сечения, поэтому проводим через этот центр оси $x_3 - x_3$ и $x_4 - x_4$ параллельно оси x-x. Расстояние между этими осями и осью x-x составит $a_3 = a_4 = 5,0 \text{ см}$ (см. рис. 12-б).

Т. к. моменты инерции сложной фигуры складываются из моментов инерции составляющих фигур относительно той же оси, можем записать

$$J_x = J_x^1 + J_x^2 + J_x^3 + J_x^4,$$

J_x - осевой момент инерции сечения балки относительно оси $x-x$;

J_x^I - осевой момент инерции прямоугольника (фигура I) относительно оси $x-x$. Площадь фигуры - 144 см^2 , $a_I = 0$; $J_{x_c}^I$ - момент инерции фигуры I относительно центральной оси $x-x$,

$$J_x^1 = J_{x_c}^1 + a_1^2 F_1 = J_{x_c}^1 = \frac{BH^3}{12} = \frac{8 \cdot 18^3}{12} = 3888 \text{ см}^4;$$

J_x^2 - осевой момент инерции прямоугольного отверстия (фигура 2) относительно оси $x-x$. Площадь отверстия - 12 см^2 , $a_2 = 0$. Момент инерции фигуры 2 относительно центральной оси $J_{x_c}^2 = \frac{b_2 h_2^3}{12}$;

$$J_x^2 = J_{x_c}^2 + a_2^2 F_2 = J_{x_c}^2 = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{6 \cdot 2^3}{12} = 4 \text{ см}^4;$$

J_x^3 - осевой момент инерции круглого отверстия (фигура 3) относительно оси $x-x$. Площадь отверстия - $28,26 \text{ см}^2$, $a_3 = 5,0 \text{ см}$. Момент инерции фигуры 3 относительно оси $x_3 - x_3$ $J_{x_c}^3 = 0,05 D^4$;

$$\begin{aligned} J_x^3 &= J_{x_c}^3 + a_3^2 F_3 = 0,05 D^4 + a_3^2 F_3 = \\ &= 0,05 \cdot 6,0^4 + 5^2 \cdot 28,26 = 64,8 + 706,5 = 771,3 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

J_x^4 - осевой момент инерции круглого отверстия (фигура 4) относительно оси x-x. Площадь отверстия - 28,26 см²,
 $a_4 = -5,0$ см. Момент инерции относительно оси x_4-x_4

$$J_{x_c}^4 = 0,05 D^4 = 64,8 \text{ см}^4;$$

$$J_x^4 = J_{x_c}^4 + a_4^2 F_4 = 0,05 D^4 + (-5,0)^2 \cdot 28,26 =$$

$$= 64,8 + 706,5 = 771,3 \text{ см}^4;$$

Таким образом, осевой момент инерции сечения балки определится

$$J_x = J_x^1 - (J_x^2 + J_x^3 + J_x^4) = 3888 - (4 + 2 \cdot 771,3) = 2341,4 \text{ см}^4,$$

Осевой момент сопротивления

$$W_x = \frac{J_x}{H/2} = \frac{2341,4}{9,0} = 260,16 \text{ см}^3;$$

Площадь балки $F = F_1 - (F_2 + F_3 + F_4) =$

$$= 144 - (12 + 2 \cdot 28,26) = 75,48 \text{ см}^2$$

$$F = 75,5 \text{ см}^2$$

Расчеты показали, что рассмотренное сечение по всем показателям геометрических характеристик уступает конструкциям балок, приведенным на рис. 7.

Пример 9. Определить геометрические характеристики для фермы высотой $H_{\Phi} = 30$ см, образованной из двух равнополочных уголков № 2,8 по ГОСТ 8509-72.

Решение: Из ГОСТ 8509-72 для заданного профиля № 2,8 выписываем (можно воспользоваться данными из примера 7): основные размеры уголка - 28 x 28 x 3 мм; площадь сечения - 1,62 см²; $x_0 = y_0 = 0,8$ см; $J_{x_c} = 1,16$ см⁴. Для наглядности можно составить расчетную схему (см. рис. 13) и определить расстояние

$$a = \frac{H_{\Phi}}{2} - y_0 = 15,0 - 0,80 = 14,2 \text{ см.}$$

Осевой момент инерции фермы относительно оси x-x определяется по формуле

$$J_x = 2 (J_{x_c} + a^2 F) = 2 (1,16 + 14,2^2 \cdot 1,62) =$$

$$= 2 (1,16 + 201,64 \cdot 1,62) = 2 \cdot 327,8 =$$

$$= 655,6 \text{ см}^4;$$

$$J_x = 655,6 \text{ см}^4$$

Осевой момент сопротивления относительно оси x-x

$$W_x = \frac{J_x}{H_{\Phi}/2} = \frac{655,6}{15} = 43,7 \text{ см}^3.$$

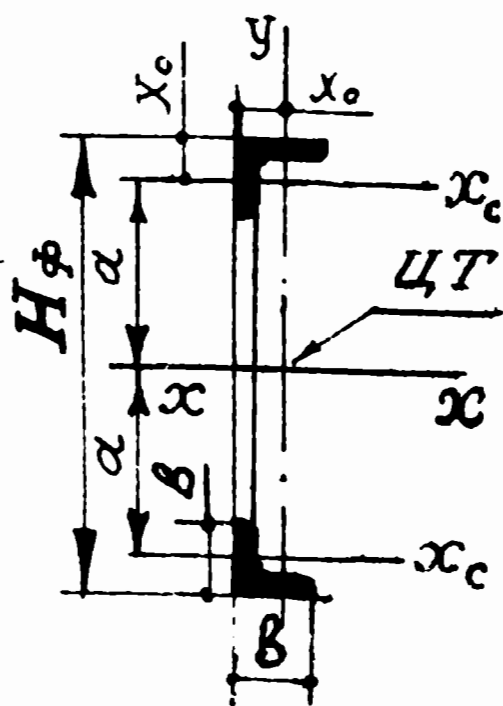


Рис. 13

Осевой момент инерции относительно оси у-у определится из условия совмещения центральной оси уголка с главной центральной осью фермы ($c = 0$)

$$J_y = 2(J_{y_c} + c^2 F) = 2 J_{y_c} = 2 \cdot 1,16 = 2,32 \text{ см}^4.$$

Ввиду того, что до крайних волокон по этой оси разные расстояния, вычисляем два момента сопротивления:

$$W_y^1 = \frac{J_y}{x_0} = \frac{2,32}{0,8} = 2,9 \text{ см}^3,$$

$$W_y^2 = \frac{J_y}{b - x_0} = \frac{2,32}{2,8 - 0,8} = 1,16 \text{ см}^3,$$

Расчетная площадь фермы $F_{\text{ф}} = 2 F_{y\Gamma} = 2 \times 1,62 = 3,24 \text{ см}^2$.

Масса 1 пог. м конструкции - $2 \times 1,27 = 2,54 \text{ кг/пог. м}$.

Из приведенного расчета весьма наглядно видно, что даже при незначительном по величине "собственном" моменте инерции сечения уголка можно создавать конструкцию с большими величинами моментов инерции в основном за счет увеличения высоты фермы. В конструкциях, перекрывающих значительные пролеты (например, мосты, перекрытия в зданиях, над сценой, пролеты ферм в театральных станках для прохода под ними фурок с артистами и декорациями и т. п.), требуется сечения со значительными по величине моментами инерции и моментами сопротивлений. Экономичность конструкций и достигается в основном увеличением высоты ферм. В тех случаях, когда высота ограничивается художником, приходится увеличивать число ферм или применять другие

формы прокатных профилей. Поскольку моменты инерции характеризуют одновременно и количество материала в сечении и его распределение относительно осей сечения, то изложенная выше методика позволяет использовать самые разнообразные по форме сочетания прокатных профилей и в зависимости от поставленных задач определять оптимальные варианты конструкций.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И МОМЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЙ СОСТАВНЫХ СЕЧЕНИЙ ИЗ ПРОКАТНЫХ ПРОФИЛЕЙ

Этот вопрос рассмотрим, выполняя следующую практическую работу.

З а д а н и е

Определить осевые моменты инерции и моменты сопротивления для заданного поперечного сечения балки (см. рис. 14). Определить массу I пог. м конструкции.

Р е ш е н и е

Задача определения моментов инерции и моментов сопротивления для заданной составной балки распадается на несколько этапов. Во-первых, необходимо определить положение главных центральных осей, т. е. определить положение ЦТ составного сечения. Во-вторых, вычислить относительно этих осей моменты инерции всех фигур, составляющих балку. Сумма моментов инерций составных фигур относительно главных центральных осей определит момент инерции всего составного сечения. В-третьих, определить моменты сопротивления составной балки.

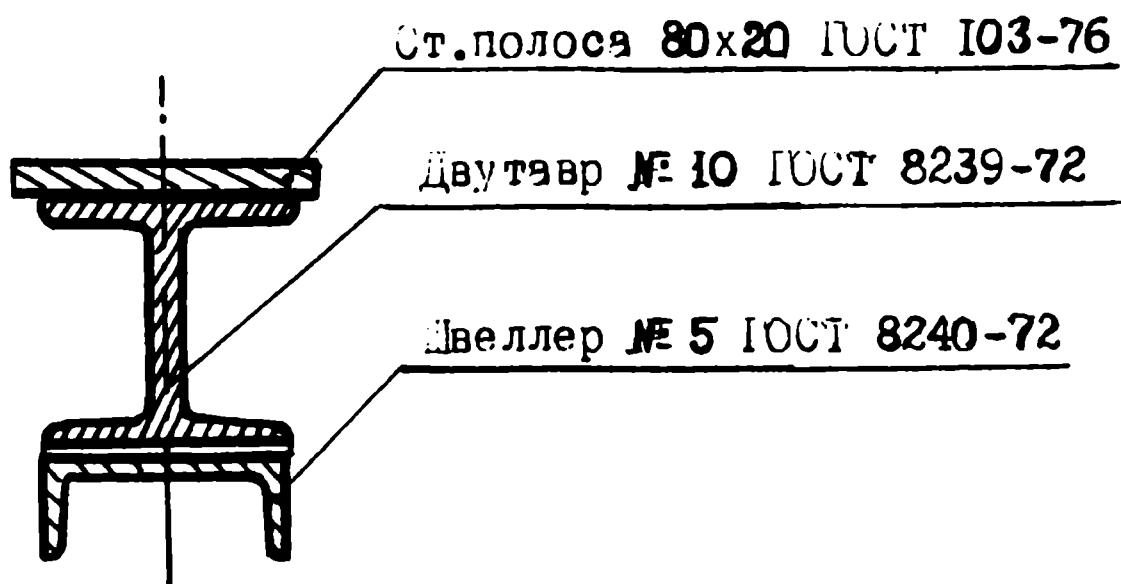


Рис. 14

Для быстрого и качественного выполнения задания рекомендуется следующая методика работы:

1. рассмотреть сечение составной балки, расчленив это сечение на простейшие фигуры, положение ЦГ которых известны или легко определимы. В нашем задании их три;

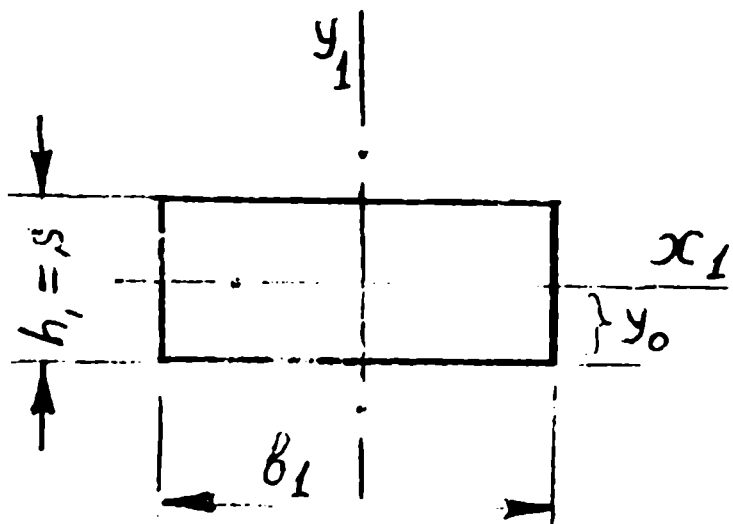
2. выписать из ГОСТ основные размеры, площадь, положение ЦГ, моменты инерций фигур и массу I пог. м. для нашего задания:

а). стальная полоса 80 x 20 мм, ГОСТ 103-76

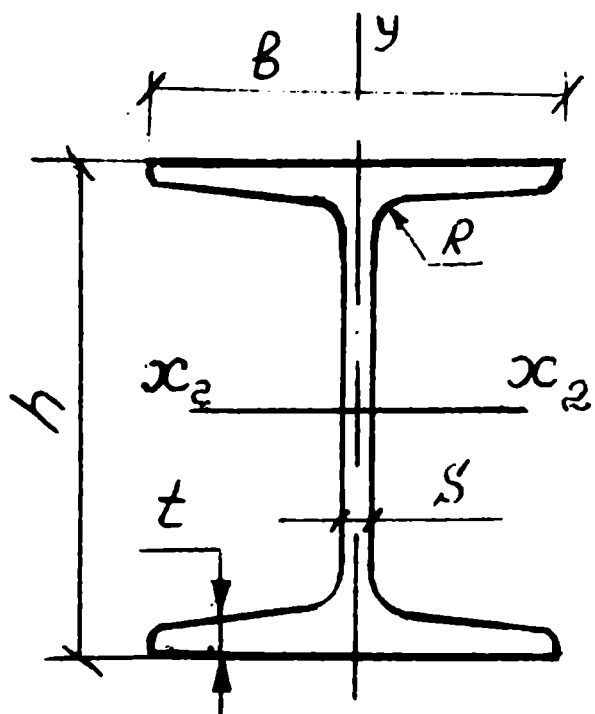
$$b_I = 8,0; h_I = 2,0 \text{ см. Площадь } F_I = 8 \times 2 = 16 \text{ см}^2;$$

$$q = 12,6 \text{ кг/пог. м};$$

$$J_{x_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{8 \cdot 2^3}{12} = 5,33 \text{ см}^4;$$



$$J_{y_1} = \frac{h_1 b_1^3}{12} = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = 85,33 \text{ см}^4;$$



б) двутавр № 10 ГОСТ 3239-72

$$h_2 = 100 \text{ мм}$$

$$B_2 = 55 \text{ мм}$$

$$s = 4,5 \text{ мм}$$

$$t = 7,0 \text{ мм}$$

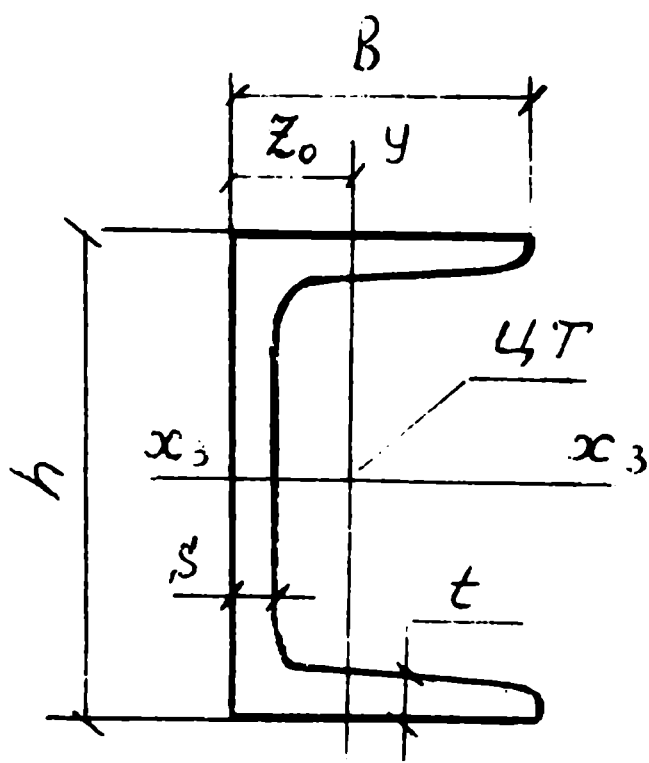
$$R = 12 \text{ мм}$$

$$F_2 = 12 \text{ см}^2$$

$$J_{x_2} = 198 \text{ см}^4$$

$$J_{y_2} = 17,9 \text{ см}^4$$

$$q = 9,46 \text{ кг/пог. м}$$



в) швеллер № 5 ГОСТ 8240-72

$$B_3(h) = 50 \text{ мм}$$

$$h_3(B) = 32 \text{ мм}$$

$$s = 4,4 \text{ мм}$$

$$t = 7,0 \text{ мм}$$

$$y_0(z_0) = 1,16 \text{ см}$$

Рис. 15

$$F_3 = 6,16 \text{ см}^2$$

$$J_{y_3} - (J_{x_3}) = 22,8 \text{ см}^4$$

$$J_{x_3} - (J_{y_3}) = 5,63 \text{ см}^4$$

$$q = 4,84 \text{ кг/пог. м}$$

Выписки из ГОСТ необходимо откорректировать в зависимости от положения фигур в конструкции. Рекомендуем все высоты в фигурах обозначать буквой "h", а горизонтальные размеры буквой "в" с добавлением номера (индекса) фигуры. В рассматриваемом задании для стальной полосы и двутавра буквы изменять нет надобности, т.к. их положение в конструкции совпадает с ГОСТ, необходимо только проставить индексы фигур. Для швеллера, оси которого в конструкции повернуты, нужно h заменить на v_3 , а размер "в" обозначить "h₃". Аналогичную работу необходимо проделать с координатами ЦТ и с моментами инерции. Старые обозначения заключить в скобки не зачеркивая и рядом записать новые обозначения. Иногда, чтобы не вносить новых обозначений, изображают сечение балки в произвольном масштабе и указывают на схеме численные значения всех характерных размеров. Во всяком случае, эту подготовительную часть работы нужно делать очень внимательно с полным пониманием существа расчетов.

Р а с ч е т ы

I. Определение ЦТ составного сечения. Данное сечение имеет вертикальную ось симметрии. Для определения положения оси x-x примем ось $x_2 - x_2$ и ось y-y за систему осей координат и определим координаты ЦТ всего сечения. Положение ЦТ всех фигур, их площади и расстояния до оси $x_2 - x_2$ известны. Полученные данные сведем в таблицу и через статические моменты определим недостающую координату y_0 : (см. с. 45)

По результатам расчета определяем в выбранной системе координат положение ЦТ сечения. Наносим ось x-x, а если схема не масштабная, то "привязываем" эту ось к известным осям, положение которых уже известно (см. рис. 16).

№ фи-гу-ры	Площадь фигуры $F_i, \text{см}^2$	Ордина-та ЦТ $y_i, \text{см}$	Статиче-ский мо-мент $S_x = \sum y_i F_i$ см^3	Примечания, расчеты
1.	16,0	6,0	96,0	$y_1 = \frac{b_1}{2} + \frac{h_2}{2} = \frac{2,0}{2} + \frac{10}{2} = 1+5=6,0$
2.	12,0	0,0	0,0	$y_2 = 0$
3.	6,16	-6,16	-37,9	$y_3 = \frac{h}{2} + z_0 = \frac{10}{2} + 1,16 =$ $= 5,0 + 1,16 = 6,16 \text{ см}$
-	34,16	-	58,1	$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{58,1}{34,16} = 1,7 \text{ см}$

2. Определяем осевые моменты инерций сечения.

Относительно оси x-x: $J_x = J_x^I + J_x^2 + J_x^3 = 301,2 +$
 $232,7 + 386,2 = 920,1 = 920 \text{ см}^4,$

где J_x - момент инерции всего заданного сечения;

J_x^I - момент инерции первой фигуры (полосы) относи-тельно оси x-x.

$$J_x^I = J_{x_I}^1 + a_1^2 F_1 = \frac{b_1 h_1^3}{12} + 4,3^2 \times 16,0 =$$

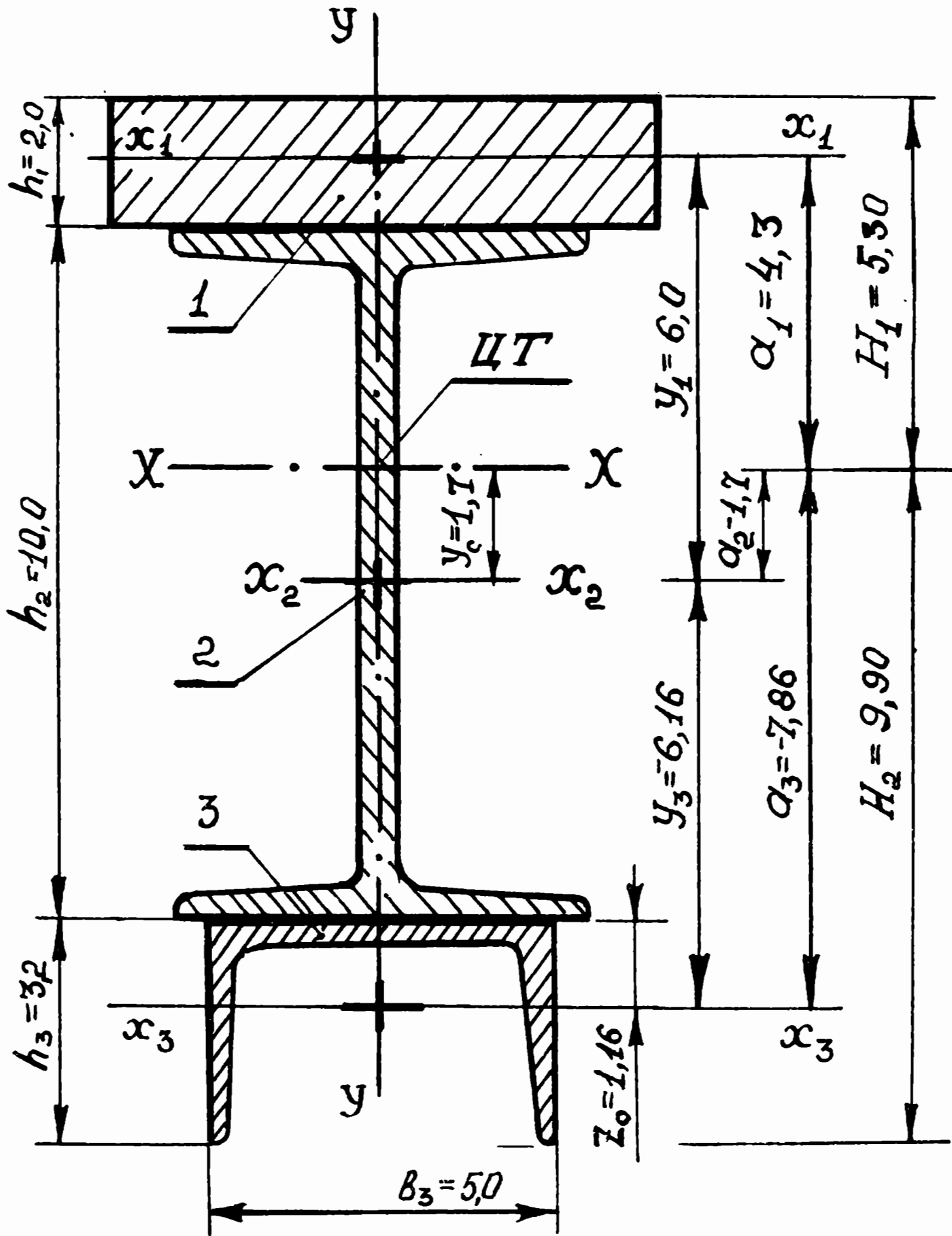


Рис. 16

$$= 5,33 + 295,84 = 301,17 \text{ см}^4 = 301,2 \text{ см}^4;$$

J_x^2 - момент инерции второй фигуры (двутавра) относительно оси x-x.

$$J_x^2 = J_{x_2}^2 + a_2^2 F_2 = 198,0 + 1,70^2 \cdot 12,0 = \\ 198 + 34,68 = 232,7 \text{ см}^4;$$

J_x^3 - момент инерции третьей фигуры (швеллера) относительно оси x-x.

$$J_x^3 = J_{x_3}^3 + a_3^2 F_3 = 5,63 + 7,86^2 \cdot 6,16 = \\ 386,2 \text{ см}^4.$$

Относительно оси y-y: $J_y = J_y^1 + J_y^2 + J_y^3 = 85,3 + 17,9 + \\ + 22,8 = 126,0 \text{ см}^4,$

где J_y - момент инерции всего заданного сечения. Ось y совпадает с осями симметрии фигур $c_1, c_2, c_3 = 0; 0;$

J_y^1 - момент инерции первой фигуры (полосы) относительно оси y-y, при $c_1 = 0$

$$J_y^1 = J_{y_1} + c_1^2 F_1 = \frac{h_1 b_1^3}{12} + 0 = \frac{2 \cdot 8^3}{12} = \\ = 85,3 \text{ см}^4;$$

J_y^2 - момент инерции второй фигуры (двутавр)

$$J_y^2 = J_{y_2} + c_2^2 F_2 = J_{y_2} = 17,9 \text{ см}^4;$$

J_y^3 - момент инерции третьей фигуры (швеллер)

$$J_y^3 = J_{y_3} + a_3^2 F_3 = J_{y_3} = 22,8 \text{ см}^4.$$

Таким образом, осевые моменты инерции всего сечения определены $J_x = 920 \text{ см}^4$; $J_y = 126 \text{ см}^4$.

3. Определяем осевые моменты сопротивления.

Относительно оси x-x:

для верхних волокон полосы при $H_1 = 5,30 \text{ см}$

$$W_x^I = \frac{J_x}{H_1} = \frac{420}{5,3} = 173,58 = 173,6 \text{ см}^3;$$

для кромок швеллера при $H_2 = 9,90 \text{ см}$

$$W_x^{II} = \frac{J_x}{H_2} = \frac{920}{9,9} = 92,93 = 93,0 \text{ см}^3.$$

Относительно оси y-y:

$$W_y = \frac{J_y}{v_I/2} = \frac{126,0}{4,0} = 31,5 \text{ см}^3,$$

где $\frac{v_I}{2}$ — максимальное удаление волокон от оси y-y (волокна полосы).

Таким образом, осевые моменты сопротивления всего сечения

$$W_x = 93,0 \text{ см}^3; \quad W_y = 31,5 \text{ см}^3.$$

4. Определяем массу I пог. м конструкции:

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = 12,6 + 9,46 + 4,84 = 26,9 = 27 \frac{\text{кг}}{\text{пог. м}}.$$

В заданиях для самостоятельной работы, аналогичных рассмотренному выше, приняты, как правило, прокатные профили больших размеров, по своим параметрам мало используемые в театральных конструкциях. Это вызвано теми обстоятельствами, что, во-первых, на эти профили имеются выписки из ГОСТ во многих справочниках и учебной литературе, а во-вторых, в расчетах выпуклее

отражаются особенности работы балок в вертикальной и горизонтальной плоскостях, легче проследить реализацию на практике навыков приближенных вычислений.

5. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЕЧЕНИЙ ИЗ ПРОКАТНЫХ ПРОФИЛЕЙ

Несомненно, что определение геометрических характеристик сечений связано с довольно громоздкими вычислениями, и, помимо принципиальных ошибок, вполне возможны и арифметические. Если еще учесть, что на подготовку спектакля времени всегда мало, материалы, заложенные в чертежах конструкции театральных декораций, зачастую не совпадают с имеющимися у изготовителя... В этих условиях бесконечные просчеты площадей, моментов инерций или моментов сопротивлений не имеют смысла и могут превратиться в выкладки, не отражающие существа дела, и в конечном итоге на практике приводят постановочный персонал к "математическому нигилизму" и изготовлению театральных декораций, надеясь на "строгость глаза" или "высшую интуицию" изготовителя. Многих ошибок можно избежать, если не впадать в крайности и разумно сочетать теоретический анализ с практическими достижениями театра.

Для наиболее часто применяющихся в театральной практике материалов — бруски, трубы, фермы из труб и первых номеров уголков различных ГОСТ — и наиболее распространенных размеров ферм автором были разработаны таблицы для расчета элементов конструкций театральных декораций. В Приложении II приводятся графики для ферм из труб и уголков, построенных по данным этих таблиц. Пользование графиками несложно и не требует особых пояснений, однако для закрепления практических навыков работы с графиками рассмотрим следующую ситуацию.

Запроектированная первоначально ферма высотой $H_{\phi} = 30$ см из равнополочного уголка № 2,8 ГОСТ 8509-72 должна быть заменена на другие уголки, имеющиеся у изготовителя. Кроме того, художник и режиссер настаивают на снижении высоты ферм до 22 — 25 см.

В этой практической ситуации, когда необходимо принять быстрое решение, могут выручить графики. Пользование графиками, несколько уступая таблицам в точности, позволяют быстрее оценить общую ситуацию. Из расчета (см. пример 9) или по графикам П,3 можно выяснить, что при $H_{\phi} = 30$ см и уголках № 2,8 конструкция фермы имеет площадь сечения $F = 3,24$ см²; $q = 2,54$ кг/пог.м;

$$J_x = 655 \text{ см}^4; \quad \bar{W}_x = 43,7 \text{ см}^3.$$

По графикам П,4 и П,5 для высоты ферм 22 см и 25 см и для момента сопротивления $\bar{W}_x = 43,7$ см³ определяем "эквивалентные" возможные варианты замены. Точка пересечения горизонтальных и вертикальных линий укажет ближайшие возможные варианты конструкции ферм. Результаты показаний графиков для результирующего выбора лучше свести в таблицу (см. рис. I.7).

Из таблицы видно, что можно удовлетворить просьбу художника и режиссера, снизить высоту фермы до 22 см и изготовлять ее из равнополочного уголка 45 x 28 x 3, расположив уголок малой полкой вертикально.

№ вари- ан- тов	Высо- та фер- мы H _ф см	Материал фермы (Тип прокатных профилей из стали)	Площадь сечения F см ²	Масса конст- рукции q кг/ пог.м	Момент сопро- тивле- ния W _x см ³	Примечания
1.	30	Уг. 28х3	3,24	2,60	43,7	ГОСТ 8509-72 (П, 3)
2.	25	Уг. 36х3	4,2	3,3	45,0	ГОСТ 8509-72 (П, 3)
3.	25	Уг. 40х32х3	4,0	3,2	43,4	ГОСТ 19772-74 ХОЛОДНОГНУТЫЕ УГОЛКИ (П, 5)
4.	25	Тр. 30х26; толщина стенки - 2,0	4,8	3,7	43,0	ГОСТ 8734-75
5.	22	Уг. 45х28х3	4,3	3,4	42,0	ГОСТ 8510-72 (П, 4)
6.	22	Уг. 50х36х3	4,9	3,8	45,5	ГОСТ 19772-74 (П, 5)

Рис. 17

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Иллюзия простоты пользования графиками и таблицами обычно приводит к недоуменному вопросу: "Если без всяких вычислений по таблицам и графикам можно определить необходимые геометрические характеристики сечений и выбрать тип конструкции, то к чему эти долгие "мучения и пытки" художников математическими формулами и выкладками? Не проще ли показать, как пользоваться графиками и таблицами?"

Ответ может быть достаточно прост и краток: "Нет, не проще, так надо!" Действительно так надо, чтобы вырастить грамотного театрального работника, способного, возглавляя коллектив, принимать ответственные решения.

Подсчеты показывают, что только для изготовления театральных конструкций незаметно для нас самих используются десятки, если не сотни самых разных материалов, выпускающихся предприятиями многих отраслей промышленности страны по действующим ГОСТ, ведомственным стандартам и техническим условиям.

Раньше, когда в театре говорили, что "ферма из трубы", все понимали, что речь идет о круглой трубе (а какая еще может быть "труба"?). Сегодня круглые трубы выпускаются по десяти ГОСТ и несколькими ТУ. Кроме того, выпускаются квадратные, прямоугольные и фасонные трубы. Перечень только ГОСТов на эти трубы занимает страницу плотного текста. В каждом ГОСТе имеются десятки, а иногда несколько сотен типоразмеров. Вдумайтесь, в ГОСТе 13621-79 "Двутаавры" насчитывается 63 типоразмера, а в предыдущем ГОСТе 13621-68 было всего 8 типоразмеров. В ГОСТе 13622-79 "Тавр" насчитывается более 700 типоразмеров (семьсот - не опечатка).

Изучая геометрические характеристики сечений, Вы научились оценивать только геометрию, так сказать форму предмета, а ведь сколько нюансов есть в содержании, в свойствах материалов.

Таким образом, в этом огромном море-океане конструктивных материалов выбор оптимальных параметров театральной конструкции становится более трудным. Графики и таблицы могут охватить лишь незначительную часть материалов. Использование графиков и таблиц носит скорее вспомогательный характер, обычно может использоваться для ориентировки, для учебного процесса. Все расчеты перевести на графики невозможно, т. к. "навести справку" в таком толстом томе или даже томах, состоящих из графиков будет ни-сколько не легче, чем сделать несколько конкретных расчетов. Тем более, как показывает опыт, при конкретных ситуациях, при наличии справочников, вычислительной машинки-калькулятора и глубокого понимания теории весь расчет даже при небольшом навыке занимает всего несколько минут.

Таким образом, легче подготовить знающего человека-специалиста, вооружив его хорошей теорией и выучкой, чем заготавливать впрок бесчисленные графики, которые могут и не понадобиться.

Если приведенные соображения помогли осознать необходимость прохода сквозь лабиринты математических доказательств и Методическая разработка стала той путеводной нитью, которая помогла разобраться в теории геометрических характеристик плоского сечения, привила навыки расчетов моментов инерций и моментов сопротивлений любых конструкций, научила пользованию справочным материалом, графиками и таблицами, то автор-составитель считает свою задачу выполненной.

П р и л о ж е н и е I

ВЫВОДЫ ФОРМУЛ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И МОМЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЙ ДЛЯ ПРОСТЕЙШИХ ФИГУР: (круг, кольцо, прямоугольник, треугольник)

Для перехода от формул моментов инерций общего вида к конкретным частным формам сечений воспользуемся выводами одного из разделов математики, который называют интегральным исчислением.

Интегральное исчисление представляет собой общий метод определения площадей, объемов и центров тяжести, получивший свое систематическое развитие с конца ХУП в. В трудах знаменитого математика Г.В.Лейбница (1646 – 1716) начальная буква слова сумма (summa) обозначалась знаком S , а выражение всей функции $\int y dx$ Лейбниц называл интегралом (от лат. *integralis* целостный). Позднее Ж.-Б.Фурье (1768 – 1830) усовершенствовал обозначение Лейбница, придав ему вид $\int_a^b y dx$, где a и b – начальное и конечное значения x , затем появился и такой символ:

\int^F , который указывает, что интегрирование (суммирование) необходимо произвести по всей рассматриваемой площади сечения.

Применяя эти обозначения, можно сказать: "Полярный момент инерции представляет собой интеграл вида..." или на языке ма-

тематики это запишется: $J_p = \int^F \rho^2 dF$, а осевой момент

инерции относительно оси $x-x$ запишется в общем виде:

$$J_x = \int^F y^2 dF$$

Определим моменты инерции и моменты сопротивлений для простейших видов сечений: круга, кольца, прямоугольника, параллелограмма и треугольника.

Определение полярного момента инерции и полярного момента сопротивления для круга и кольца

I. К Р У Г

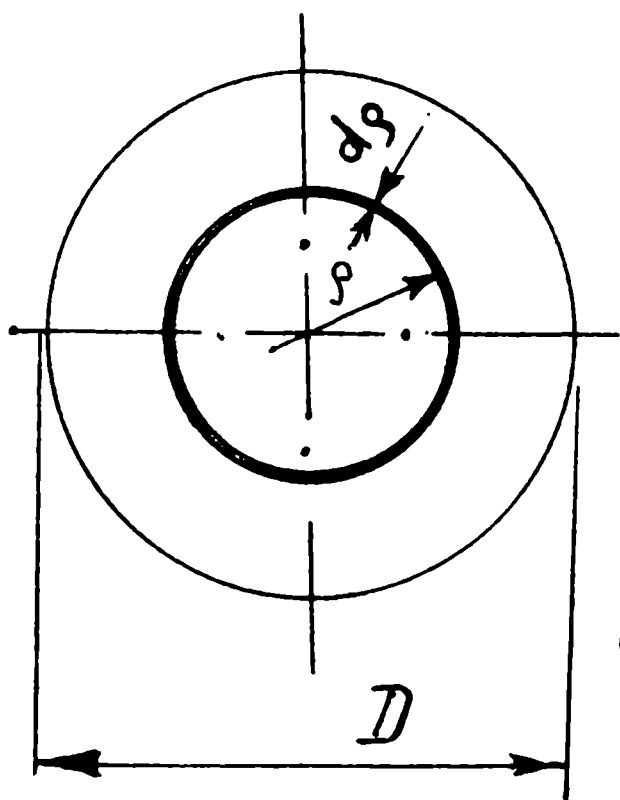


Рис. I, 1

Полярный момент инерции в общем виде представлен интегралом

$$J_p = \int r^2 dF$$

где r - переменный радиус, изменяющий свое значение от нуля в центре круга до максимального значения

$D/2$ (рис. I, 1)

$dF = 2\pi r dr$ - элементарная площадка, представляющая длину окружности $2\pi r$, умноженная на толщину слоя dr

Подставим в формулу общего вида значения r и dF для круга. Тогда

$$J_p = \int r^2 dF = \int r^2 2\pi r dr$$

Затем вынесем постоянные величины за знак интеграла и укажем границы интегрирования от 0 до $r = D/2$, т. е. "возьмем интеграл" (или, иными словами, определим сумму произведений квадратов расстояний на элементарные площадки по всему рассматриваемому сечению):

$$J_{\rho} = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho.$$

В математических справочниках приведены формулы для решения интегралов различных видов. Например, в "Справочнике по математике" (М., 1976, § 298, с. 406) по таблице интегралов находим решение интеграла вида

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

при условии, что $n \neq -1$.

Для нашего случая интеграл принимает вид

$$J_{\rho} = 2\pi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R.$$

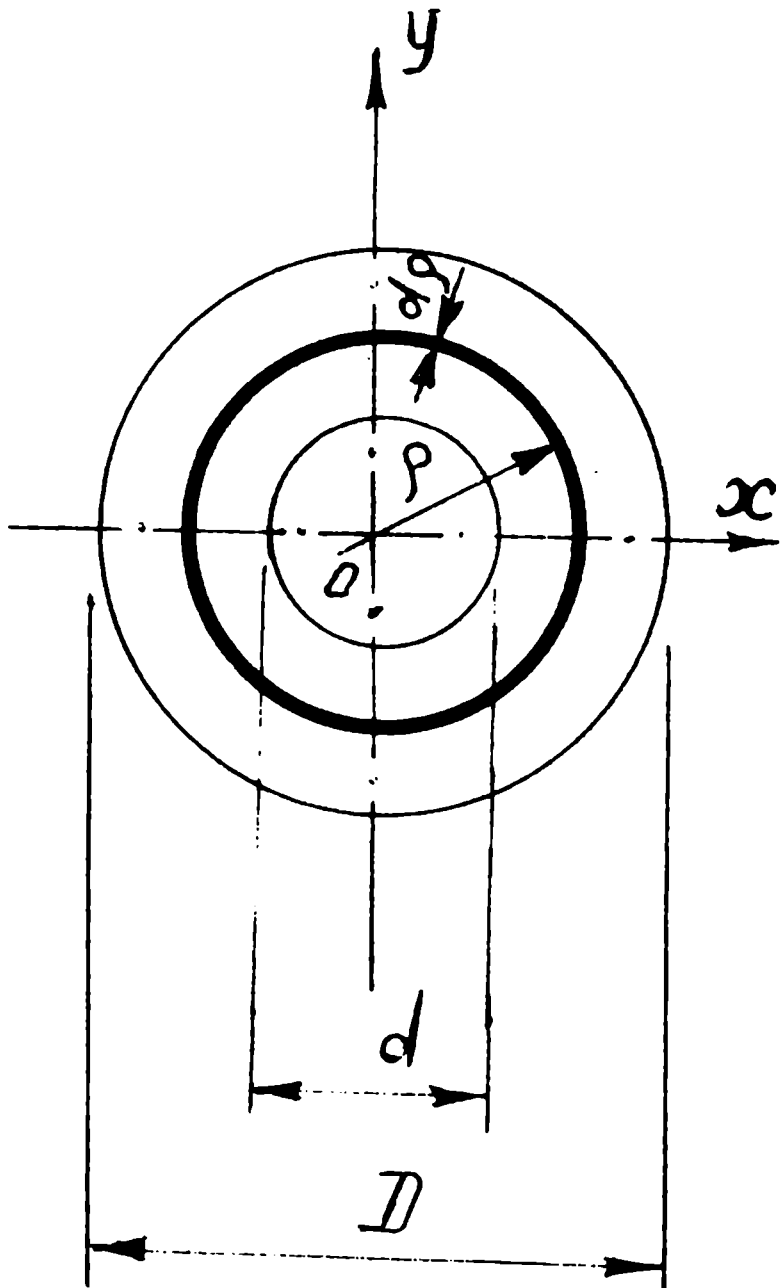
Подставляя вместо переменной величины ρ его крайние значения, получаем:

$$\begin{aligned} J_{\rho} &= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right] = 2\pi \left[\frac{(D/2)^4}{4} - 0 \right] = 2\pi \cdot \frac{D^4}{16 \cdot 4} = \frac{\pi D^4}{32} = \\ &= \frac{3,14 D^4}{32} \approx 0,1 D^4. \end{aligned}$$

Полярный момент сопротивления для круга -

$$W_{\rho} = \frac{J_{\rho}}{r} = \frac{\pi D^4 \cdot 2}{32 D} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2 D^3.$$

П. КОЛЬЦО



$$\frac{d}{2} < \rho < \frac{D}{2};$$

$$\alpha = \frac{d}{D};$$

Рис. I, 2

Полярный момент инерции для кольца в общем виде выражается формулой

$$J_p = \int \rho^2 dF$$

и элементарная площадка

$$dF = 2\pi \rho d\rho$$

выражается той же формулой, т. е. определяется так же, как и для круга, а переменный радиус ρ изменяется в границах от внутреннего до внешнего диаметра, т. е. от

$$d/2 \text{ до } D/2 \text{ (рис. I, 2).}$$

Подставляем в формулу общего вида значения ρ и dF для кольца, вынесем постоянные величины за знак интеграла и укажем границы интегрирования:

$$J_p = \int \rho^2 dF = \int \rho^2 2\pi \rho d\rho =$$

$$= 2\pi \int \rho^3 d\rho =$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{d/2}^{D/2} =$$

$$= 2\pi \left[\frac{(D/2)^4}{4} - \frac{(d/2)^4}{4} \right] = 2\pi \left[\frac{D^4}{64} - \frac{d^4}{64} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^4 (1 - \alpha^4);$$

Полярный момент сопротивления кольца:

$$W_p = \frac{J_p}{D/2} = \frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4) 2}{32 D} =$$

$$= \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0,2 D^3 (1 - \alpha^4);$$

Определение осевых моментов инерции и осевых моментов сопротивления для кольца и круга

Между полярным J_p и осевыми J_x, J_y моментами инерции плоских сечений существует определенная связь (рис. I, 3). Если точка O начало координат (т. е. точка пересечения двух взаимных перпендикулярных осей x и y), то переменный радиус ρ (расстояние от т. O до ЦТ элементарной площадки dF) является гипотенузой в прямоугольном треугольнике с катетами x и y :

$$\rho^2 = x^2 + y^2.$$

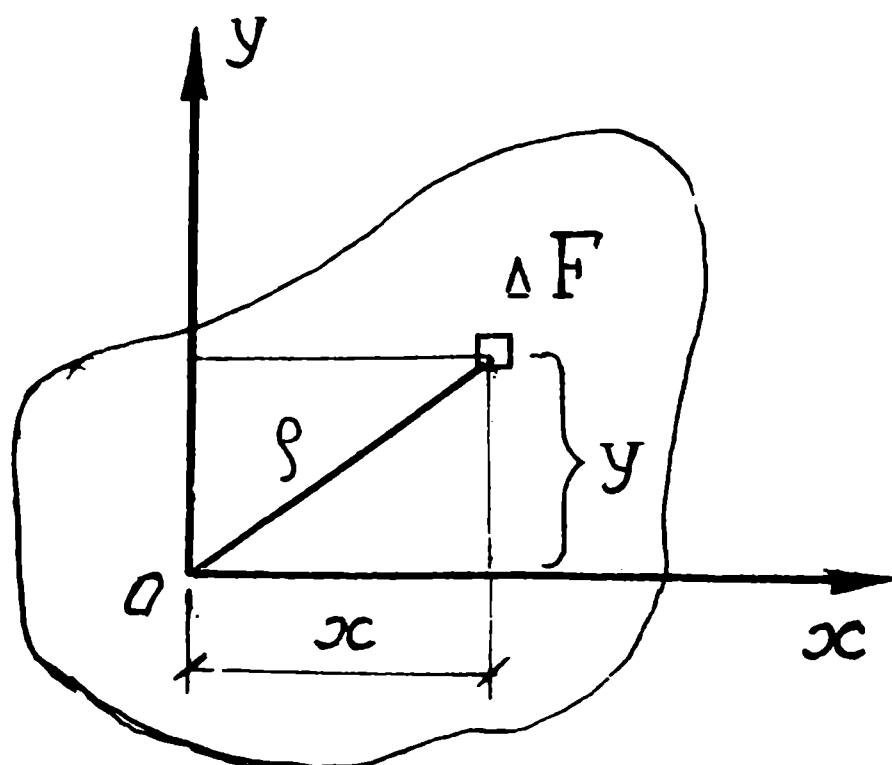


Рис. I, 3

Тогда

$$J_p = \int^F \rho^2 dF = \int^F (x^2 + y^2) dF = \\ = \int^F x^2 dF + \int^F y^2 dF = J_y + J_x,$$

$$J_p = J_x + J_y = \text{const.}$$

Следовательно:

сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно точки пересечения этих осей (начала координат).

для КРУГА в силу симметрии

$$J_x = J_y \quad \text{или} \quad J_p = 2J_x = 2J_y;$$

$$J_x = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi \cdot D^4}{32 \cdot 2} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \approx 0,05 D^4;$$

$$W_x = \frac{J_x}{D/2} = \frac{\pi D^4 \cdot 2}{64 D} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0,1 D^3;$$

для КОЛЬЦА

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi D^4 (1-\alpha^4)}{32 \cdot 2} = \frac{0,1 D^4 (1-\alpha^4)}{2} = 0,05 D^4 (1-\alpha^4)$$

$$W_x = \frac{J_x}{D/2} = \frac{0,05 D^4 (1-\alpha^4)}{D} = 0,1 D^3 (1-\alpha^4)$$

Определение осевых моментов и
и моментов сопротивлений для
прямоугольника, параллелограмма и треугольника

Ш. ПРЯМОУГОЛЬНИК

Осевой момент инерции относительно оси Ox для прямоугольника в общем виде

$$J_x = \int^F y^2 dF, \quad \text{где } Ox, Oy - \text{оси симметрии}$$

сечения, точка O - ЦТ сечения, y - расстояние от нейтральной оси Ox до ЦТ элементарной площадки.

$dF = v \cdot d y$ - элементарная площадка.

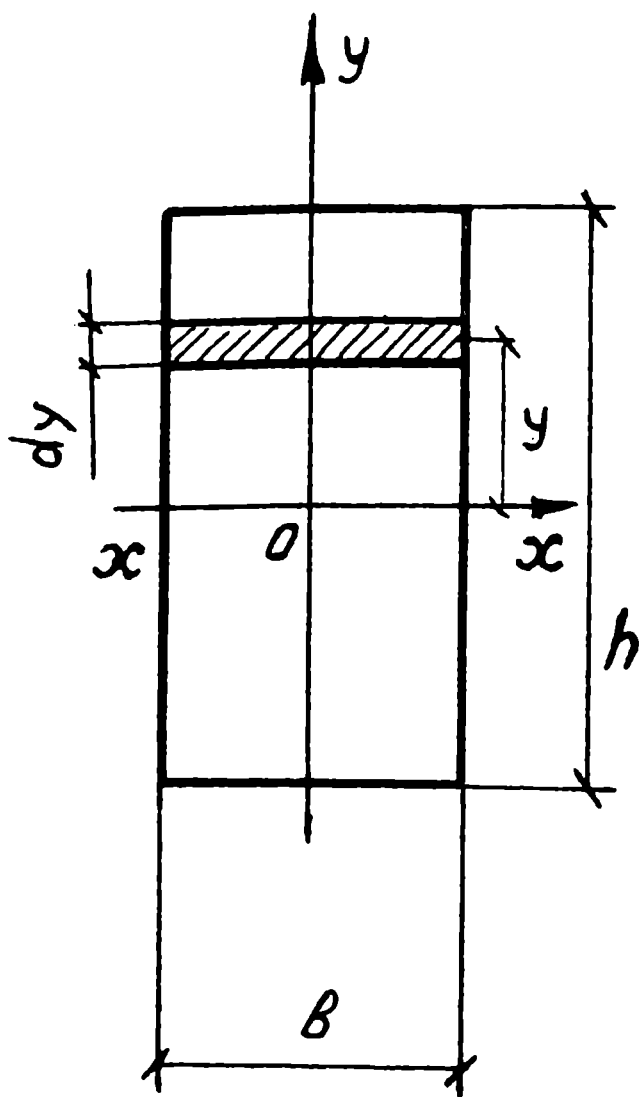


Рис. I, 4

Подставляем в формулу общего вида значения элементарной площадки применительно к прямоугольнику, устанавливаем границы интегрирования (рис. I, 4) и определяем осевой момент инерции относительно оси Oх или x-x для прямоугольника.

$$\begin{aligned}
 J_x &= \int y^2 dF = \int y^2 b dy = \\
 &= b \int y^2 dy = b \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy = \\
 &= b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{+h/2} = b \left[\frac{(h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \right] = \\
 &= b \left(\frac{h^3}{8 \cdot 3} - \frac{-h^3}{8 \cdot 3} \right) = b \left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2b h^3}{24} = \frac{b h^3}{12} \\
 J_x &= \frac{b h^3}{12}
 \end{aligned}$$

Очевидно, что осевой момент инерции относительно оси Oy или y-y вычисляется аналогично:

$$\begin{aligned}
 J_y &= \int x^2 dF = \int x^2 h dx = h \int_{-b/2}^{+b/2} x^2 dx = h \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{+b/2} = \\
 &= h \left[\frac{(b/2)^3}{3} - \frac{(-b/2)^3}{3} \right] = h \left(\frac{b^3}{8 \cdot 3} - \frac{-b^3}{8 \cdot 3} \right) = \frac{2hb^3}{24} = \frac{hb^3}{12}
 \end{aligned}$$

Осевые моменты сопротивления

относительно оси Ox $W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{\beta h^3 \cdot 2}{12 \cdot h} = \frac{\beta h^2}{6}$,

относительно оси Oy $W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{h b^3 \cdot 2}{12 \cdot b} = \frac{h b^2}{6}$.

IV. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

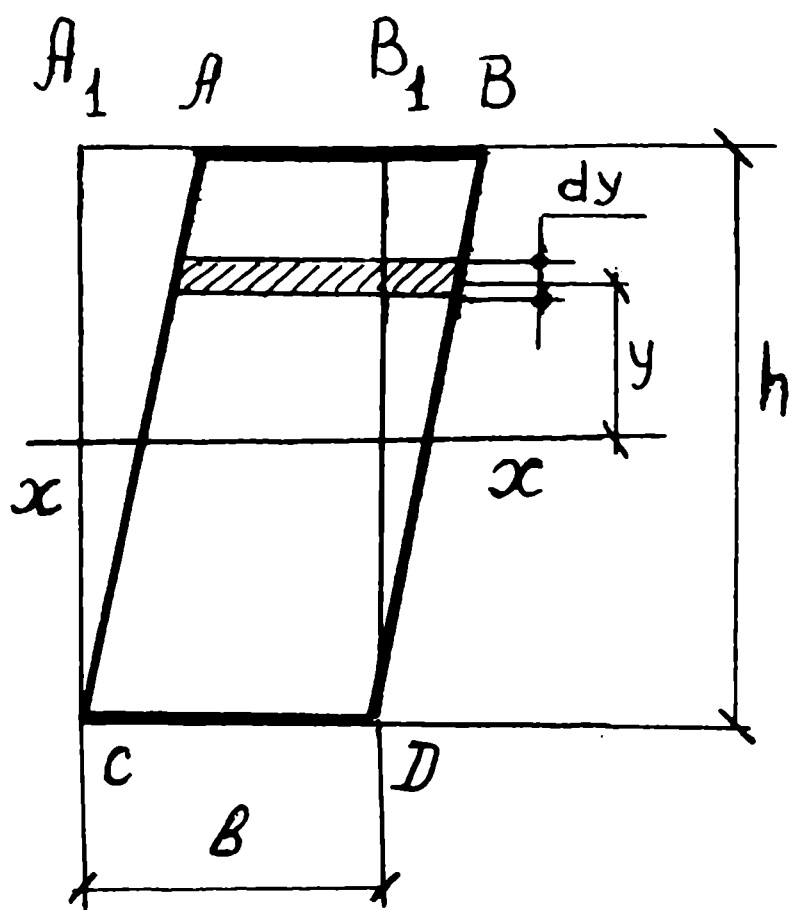


Рис. I, 5

Для определения осевого момента инерции параллелограмма сдвинем прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$ так, чтобы элементарные площадки - полоски

$dF = b dy$ остались параллельны сами себе (рис. I, 5), при этом все эти элементарные площадки расположатся в пределах параллелограмма ABCD и сумма произведений $y^2 dF$ не изменится.

Следовательно, момент инерции параллелограмма ABCD относительно оси x-x равен моменту равновеликого ему прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$

$$J_x = \frac{b h^3}{12}$$

У. ТРЕУГОЛЬНИК

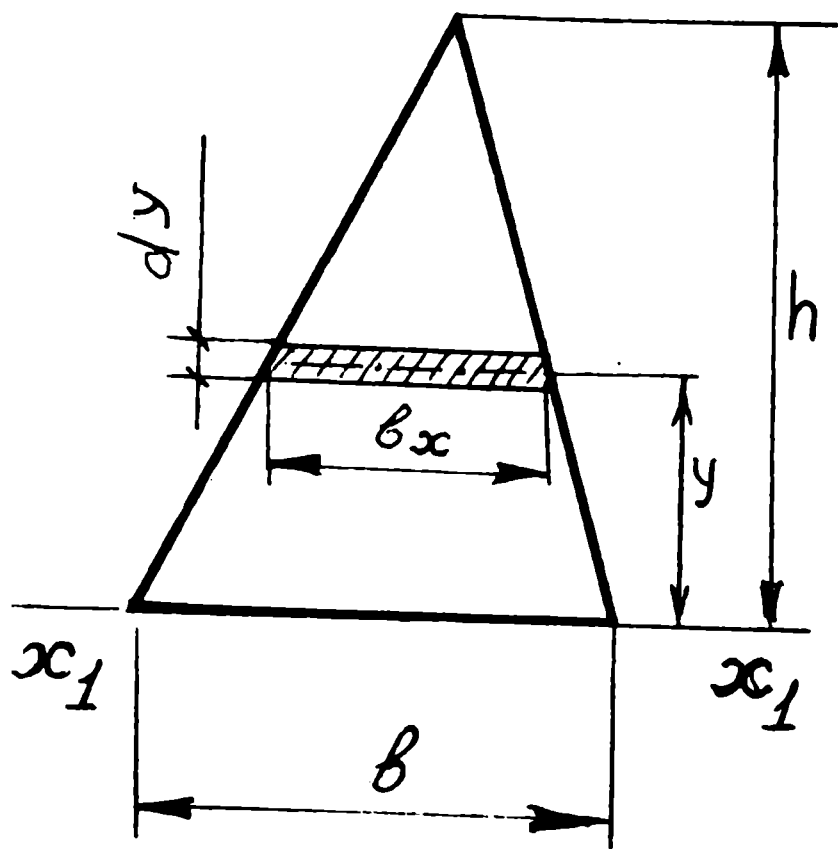


Рис. I,6

Определение осевого момента инерции треугольника рассмотрим в два этапа:

I этап. Определим вначале момент инерции треугольника относительно оси $x_1 - x_1$, проходящей через основание треугольника.

Осевой момент инерции относительно этой оси в общем виде может быть представлен

$$J_{x_1} = \int^F y^2 dF$$

На рис. I,6 видно, что ширина элементарной площадки в треу-

гольнике изменяется в зависимости от ее высоты над основанием, т. е. является переменной величиной и зависит от величины основания b и расстояния y . Эти изменения пропорциональны и можно составить пропорцию

$$\frac{b_x}{b} = \frac{h-y}{h} \text{ или } b_x h = b(h-y)$$

$$b_x = \frac{b}{h} (h-y); \quad b_x = b \left(1 - \frac{y}{h}\right).$$

Таким образом,

$$J_{x_1} = \int^F y^2 dF = \int^F y^2 \cdot b_x dy =$$

$$= \int^F y^2 \cdot b \cdot \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \int^F \left(y^2 b dy - \frac{b \cdot y^3}{h} dy \right) =$$

$$= \int_0^h (By^2 dy - \frac{b}{h} y^3 dy) = B \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^h - \frac{b}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^h =$$

$$= \frac{Bh^3}{3} - \frac{bh^4}{4h} = \frac{4Bh^3 - 3bh^3}{12} = \frac{bh^3}{12} ;$$

т. е. $J_{x_I} = \frac{bh^3}{12}$.

Осевой момент инерции относительно оси $x_I - x_I$ основания треугольника не является центральным моментом инерции.

П э т а п. Определим центральный момент инерции треугольника, воспользовавшись известной формулой

$$J_{x_I} = J_x + a^2 F,$$

где J_{x_I} — осевой момент инерции, определенный относительно основания треугольника (ось $x_I - x_I$)

J_x — осевой момент инерции относительно оси $x-x$, проведенной параллельно основанию через ЦТ сечения (центральный момент инерции)

a — расстояние между параллельными осями $x_I - x_I$

и $x-x$, $a = \frac{1}{3}h$ (см. рис. I,6-a)

F — площадь треугольника $F = \frac{1}{2} b h$.

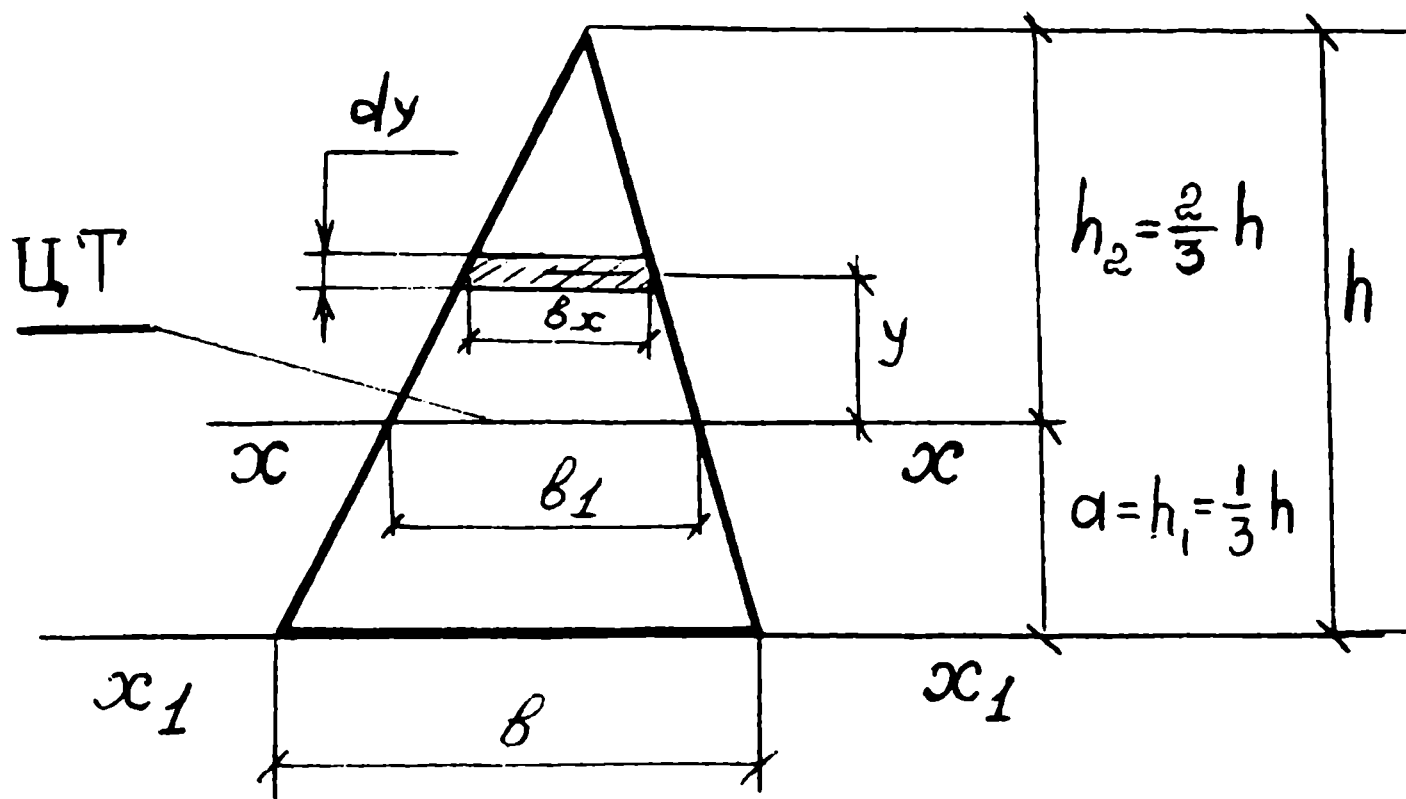


Рис. I,6-а

Тогда

$$\begin{aligned}
 \bar{J}_x &= J_{x_1} - a^2 F = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{1}{3}h\right)^2 \frac{1}{2}bh = \\
 &= \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2bh}{9 \cdot 2} = \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \\
 &= \frac{3bh^3 - 2bh^3}{36} = \frac{bh^3}{36} \\
 \bar{J}_x &= \frac{bh^3}{36}
 \end{aligned}$$

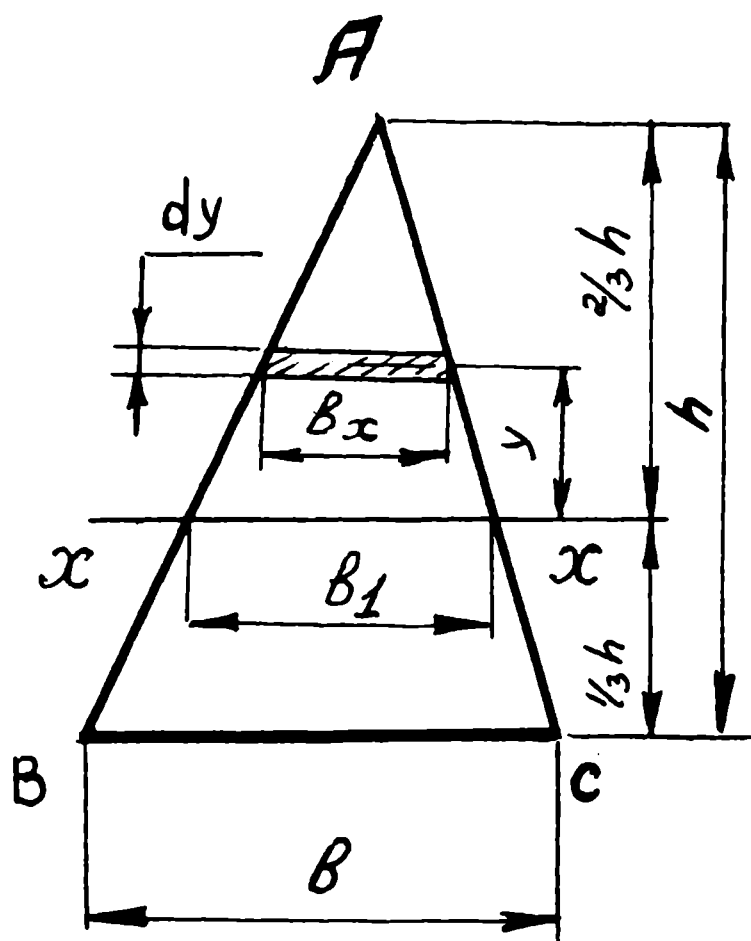


Рис. I, 7

II вариант

Определим центральный осевой момент инерции треугольника относительно оси $x-x$, которая является центральной осью, проходит через ЦТ треугольника и расположена на высоте $1/3$ от основания треугольника и параллельна ему (см. рис. I, 7). Очевидно, что в этом случае осевой момент инерции в общем виде может быть интегралом вида

$$J_x = \int y^2 dF = \int_{-1/3 h}^{+2/3 h} y^2 dF$$

(I)

где границы интегрирования от $-\frac{1}{3} h$ до $\frac{2}{3} h$, а ширина

треугольника на оси $x-x$, обозначенная $b_I = \frac{2}{3} b$ (исходя из

пропорции $\frac{b_I}{b} = \frac{2/3 h}{h}$) элементарная площадка dF может

быть представлена $dF = b_x dy$, а переменная ширина b_x опре-

делится из пропорциональных соотношений в треугольнике

$$\frac{b_x}{b_I} = \frac{2/3 h - y}{2/3 h};$$

$$\begin{aligned}
 b_x &= b_1 \left(\frac{2}{3} h - y \right) : \frac{2}{3} h = b_1 \left(\frac{2h - 3y}{3 \cdot 2 \cdot h} \right) = \\
 &= b_1 \left(1 - \frac{3y}{2h} \right) = \frac{2}{3} b_1 \left(1 - \frac{3y}{2h} \right) = \\
 &= b \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right);
 \end{aligned}$$

Таким образом, ширина элементарной площадки на любом расстоянии y от оси $x-x$ определяется формулой

$$b_x = b \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right) \quad (2)$$

Проверим полученную формулу (2), подставляя различные значения y :

для вершины треугольника А при $y = +\frac{2}{3} h$

$$b_x = b \left(\frac{2}{3} - \frac{(\frac{2}{3} h)}{h} \right) = b \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = b \cdot 0 = 0;$$

для оси $x-x$ при $y = 0$

$$b_x = b \left(\frac{2}{3} - \frac{0}{h} \right) = b \left(\frac{2}{3} - 0 \right) = \frac{2}{3} b = b_1;$$

для основания треугольника ВС при $y = -\frac{1}{3} h$

$$b_x = b \left(\frac{2}{3} - \frac{(-\frac{1}{3} h)}{h} \right) = b \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = b \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) = b;$$

Теперь формула (I) принимает вид

$$J_x = \int_{-\frac{1}{3}h}^{+\frac{2}{3}h} y^2 b \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right) dy \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\rightarrow B \int_{-1/3h}^{+2/3h} y^2 \left(\frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right) dy \rightarrow \\
 &\rightarrow B \int_{-1/3h}^{+2/3h} \left(\frac{2}{3} y^2 dy - \frac{1}{h} y^3 dy \right) \rightarrow B \left(\frac{2}{3} \int_{-1/3h}^{+2/3h} y^2 dy - \frac{1}{h} \int_{-1/3h}^{+2/3h} y^3 dy \right) = \\
 &\rightarrow B \left\{ \frac{2}{3} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-1/3h}^{+2/3h} - \frac{1}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]_{-1/3h}^{+2/3h} \right\} = \\
 &\rightarrow B \left\{ \frac{2}{3} \left[\frac{(2/3h)^3}{3} - \frac{(-1/3h)^3}{3} \right] - \frac{1}{h} \left[\frac{(2/3h)^4}{4} - \frac{(-1/3h)^4}{4} \right] \right\} = \\
 &= B \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{8h^3}{27 \cdot 3} + \frac{h^3}{27 \cdot 3} \right) - \frac{1}{h} \left(\frac{16h^4}{81 \cdot 4} - \frac{h^4}{81 \cdot 4} \right) \right\} = \\
 &= B \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{9h^3}{27 \cdot 3} - \frac{15h^4}{h \cdot 81 \cdot 4} \right) \right\} = B \left(\frac{2h^3}{27} - \frac{15h^3}{\underbrace{27 \cdot 3 \cdot 4}_{81}} \right) = \\
 &= B \left(\frac{24h^3 - 15h^3}{27 \cdot 3 \cdot 4} \right) = B \frac{9h^3}{27 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{Bh^3}{3 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{Bh^3}{36},
 \end{aligned}$$

$$J_x = \frac{Bh^3}{36}$$

(3)

Формула (3) используется для определения (центрального) осевого момента треугольника, где
 B - основание треугольника,
 h - высота треугольника.

П Р И Л О Ж Е Н И Е П

ГРАФИКИ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ И МОМЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ ДЛЯ БАЛОК И ФЕРМ ИЗ БРУСКОВ, ТРУБ И УГОЛКОВ

Ниже приведены графики для определения моментов инерции и моментов сопротивления балок из деревянных брусков и ферм из труб и уголков.

- Рис. П, 1 - Моменты инерции брусков шириной b от 1 до 5 см, высотой h от 4 до 12 см
- Рис. П, 2 - Моменты сопротивления брусков шириной от 1 до 5 см, высотой от 4 до 15 см
- Рис. П, 3 - Моменты сопротивления ферм высотой до 20 см из труб наружным диаметром от 8 до 20 мм
- Рис. П, 4 - Моменты сопротивления ферм высотой от 5 до 25 см из труб диаметром от 8 до 40 мм
- Рис. П, 5 - Моменты сопротивления ферм высотой до 40 см из равнополочного уголка ГОСТ 8509-72
- Рис. П, 6 - Моменты сопротивления ферм высотой до 40 см из неравнополочного уголка ГОСТ 8510-72
- Рис. П, 7 - Моменты сопротивления ферм высотой 40 см из гнутого неравнополочного уголка ГОСТ 19772-74
- Рис. П, 8 - Моменты сопротивления ферм высотой до 40 см из дюралюминиевого равнополочного уголка ГОСТ 13737-80
- Рис. П, 9 - Моменты сопротивления ферм высотой до 40 см из квадратной трубы ГОСТ 8639-68
- Рис. П, 10 - Моменты сопротивления ферм высотой до 40 см из прямоугольных труб ГОСТ 8639-68 (Широкой стороной горизонтально)
- Рис. П, 11 - То же, но широкой стороной вертикально

МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ БРУСКОВ

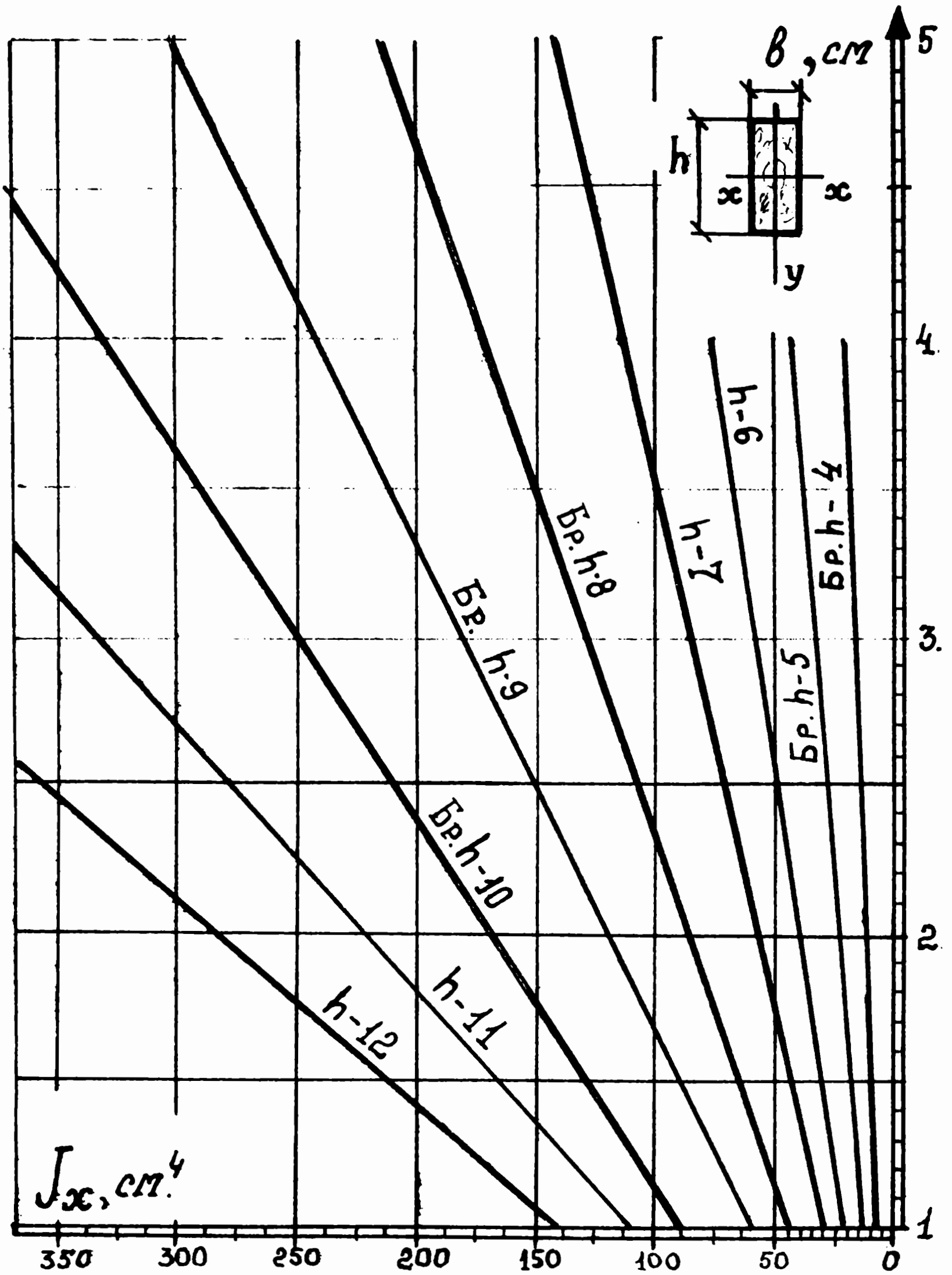


Рис. II, I

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ БРУСКОВ

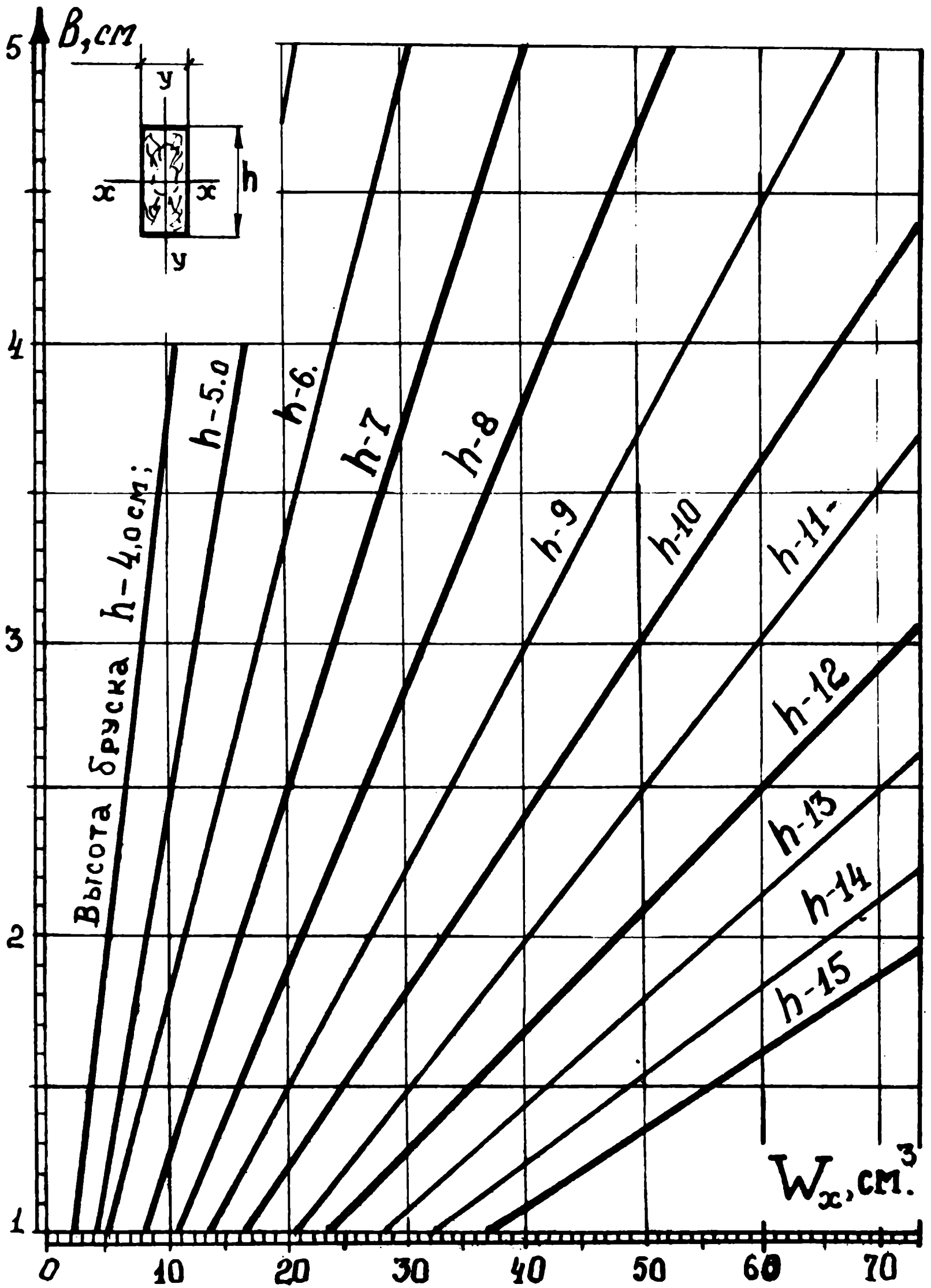


Рис. Б, 2

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ФЕРМ ИЗ ТРУБ.

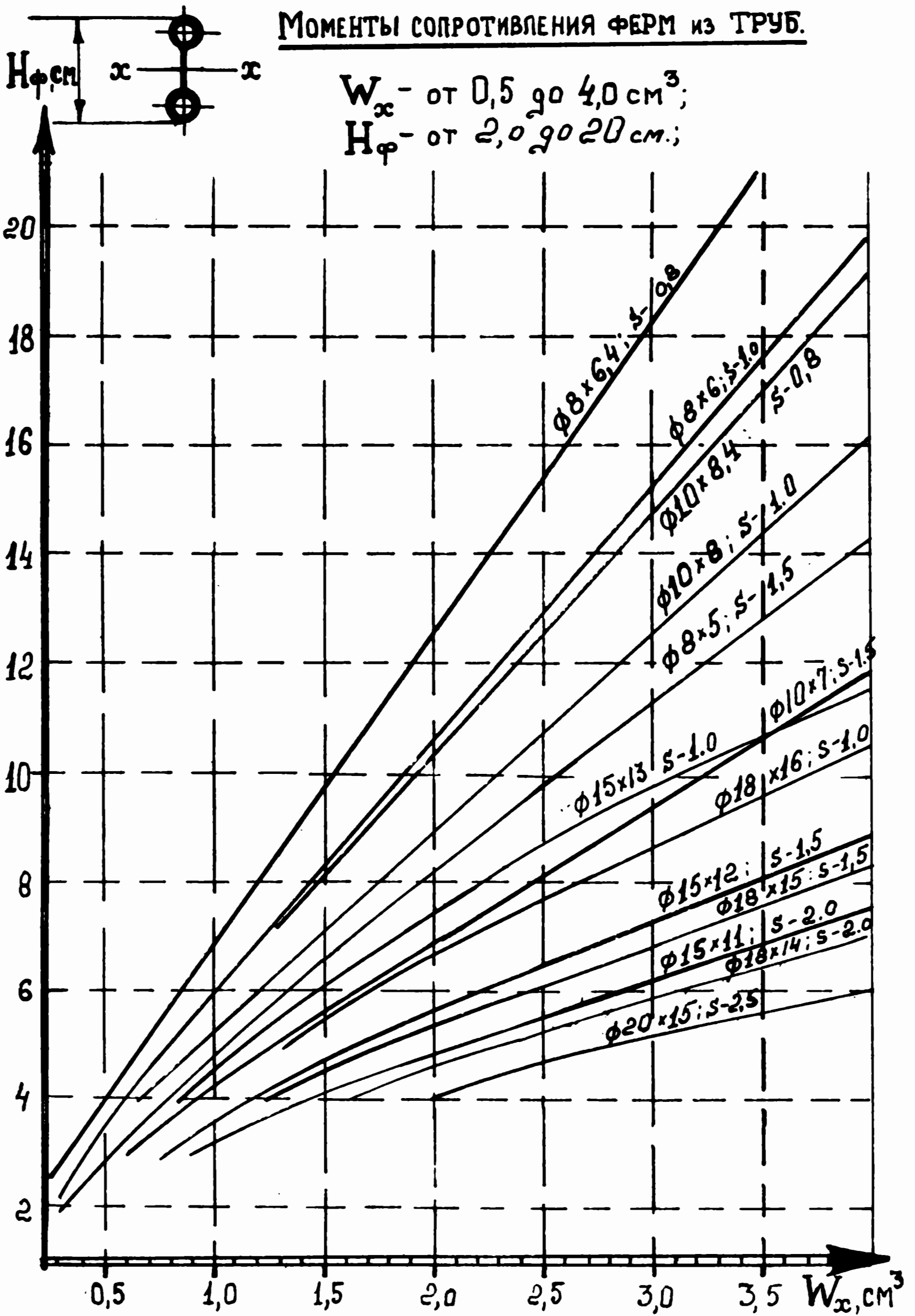


Рис. 1,3

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ФЕРМ ИЗ ТРУБ

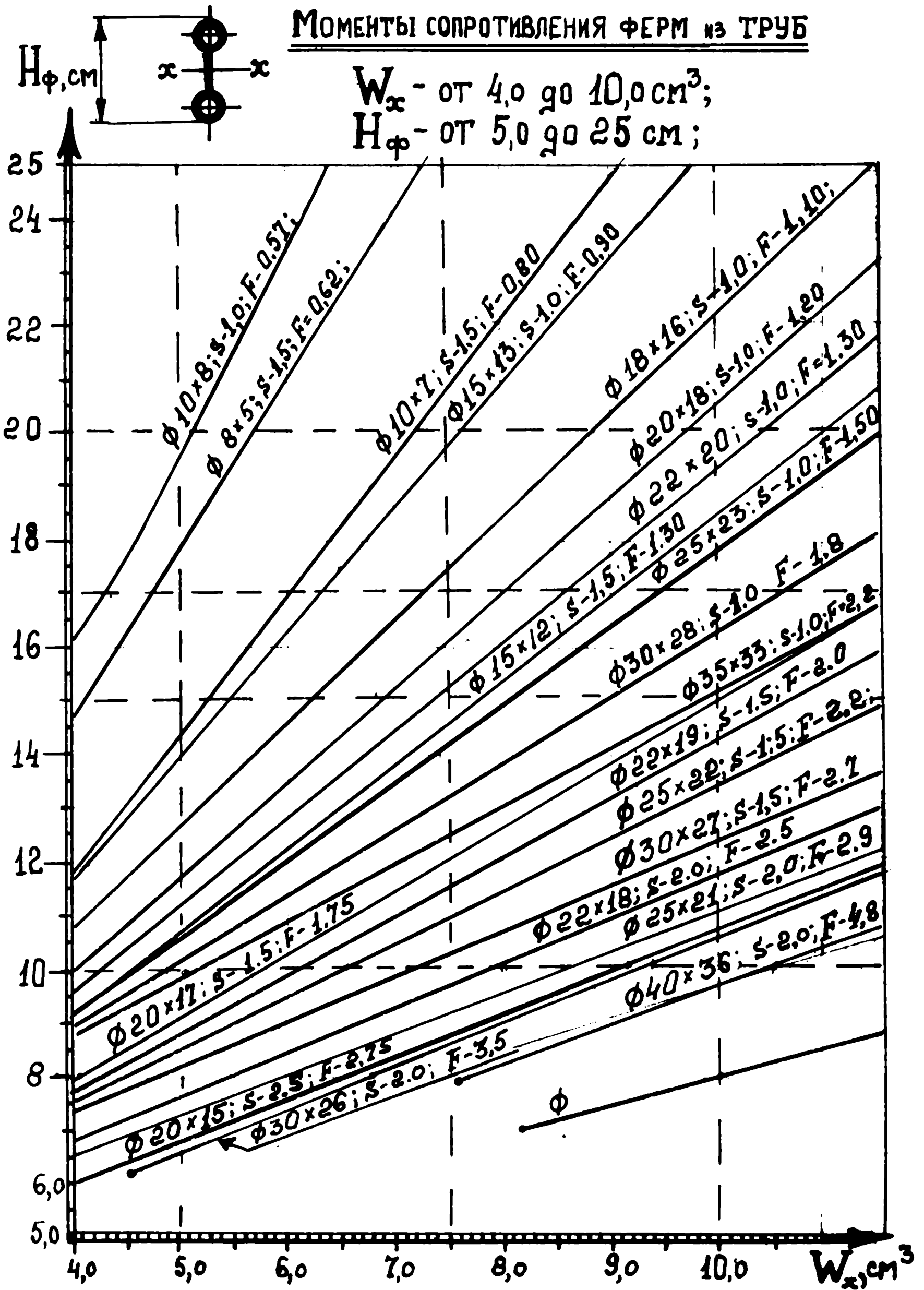


Рис. II, 4

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ФЕРМ ИЗ РАВНОПОЛОЧНОГО УГОЛКА ПО ГОСТ 8509-72

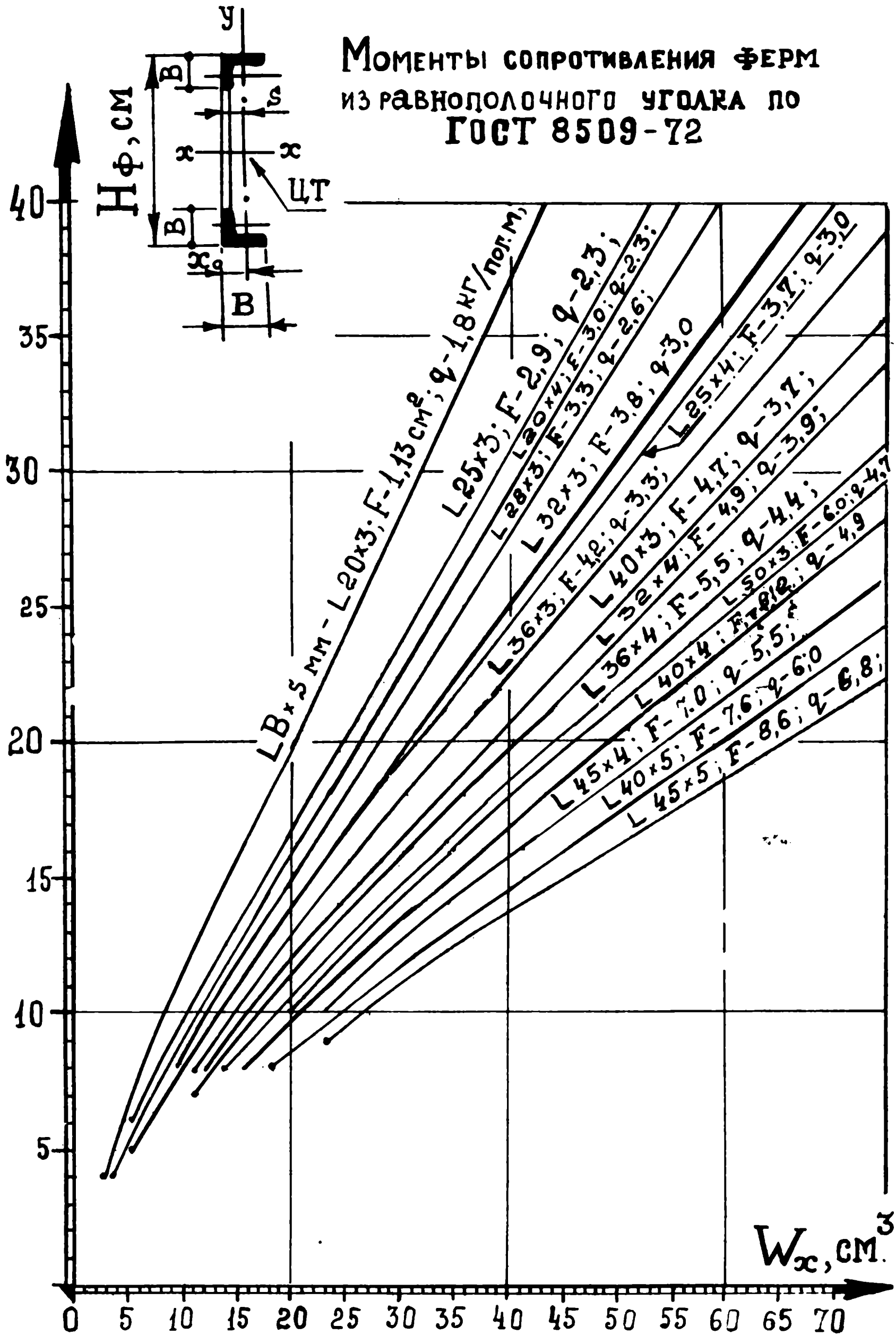


Рис. II, 5

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ФЕРМ

из НЕРАВНОПОЛОЧНОГО УГОЛКА
ГОСТ 8510-72

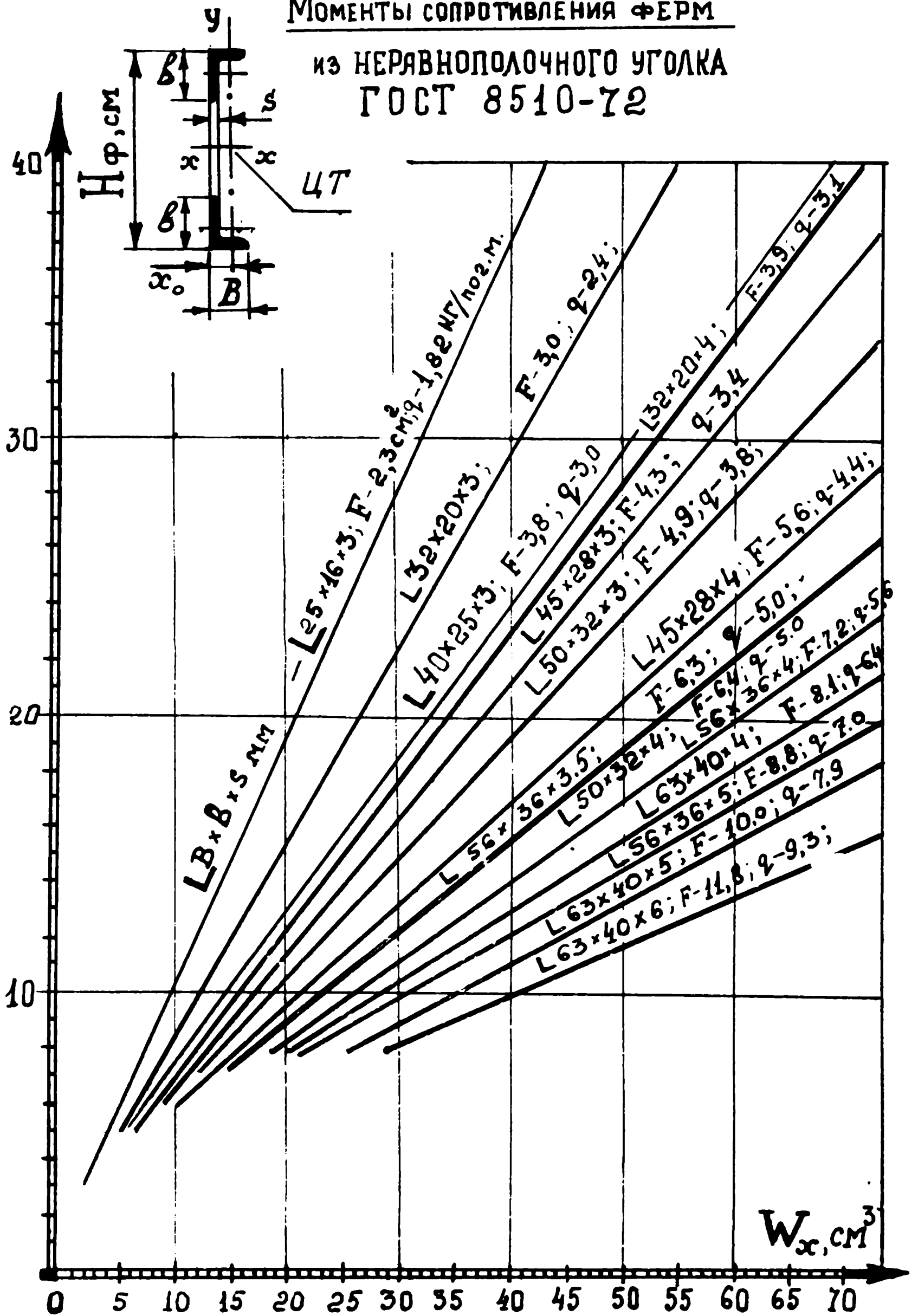


Рис. II, 6

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ФЕРМ
ИЗ ГНУТОГО НЕРАВНОПОЛОЧНОГО
УГОЛКА ПО ГОСТ 19772-74.

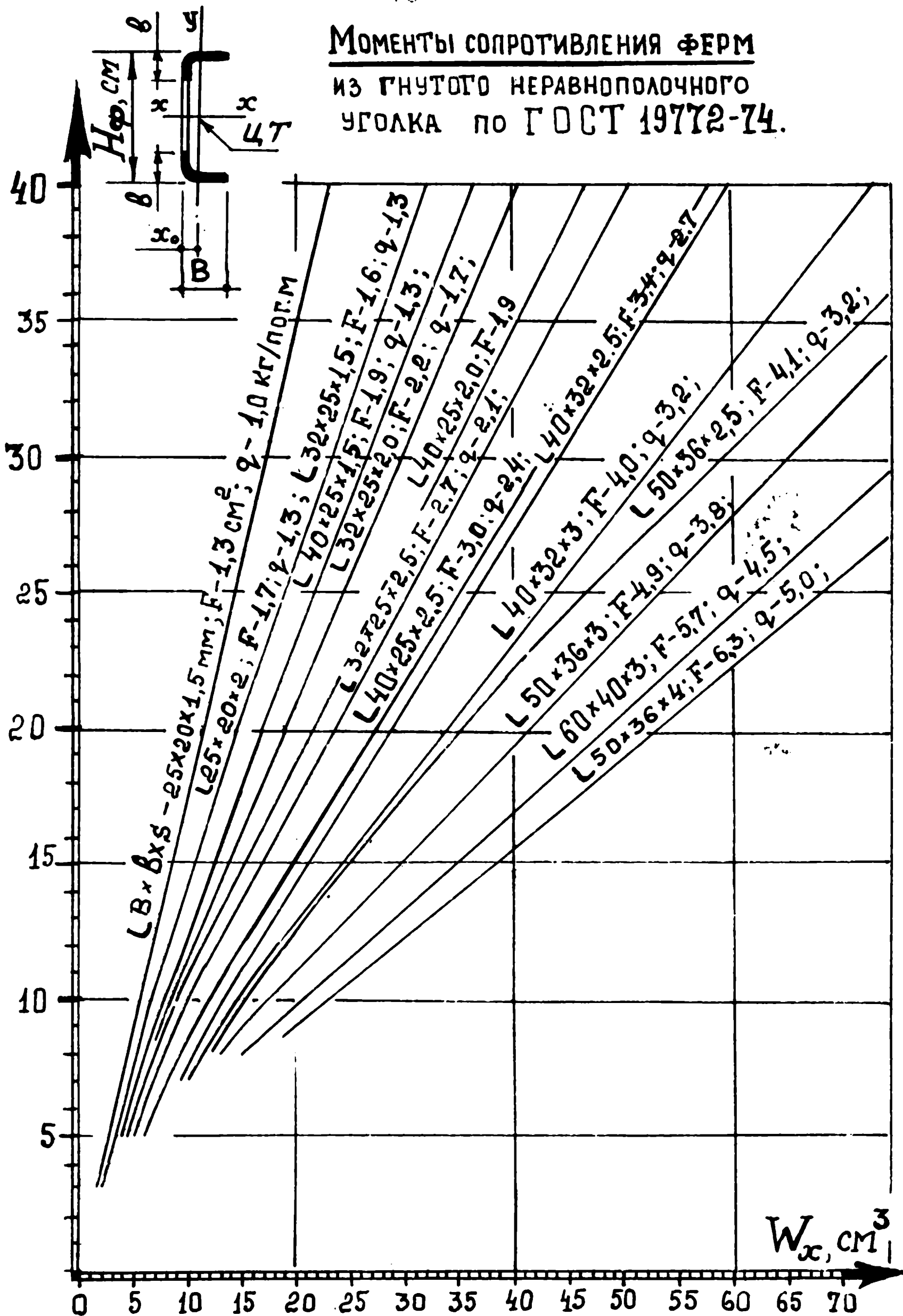


Рис. П, 7

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ФЕРМ
 ИЗ РАВНОПОДСЧНОГО УГЛАКА П 50
 ПО ГОСТ 13737-80 /дюралюминий/.

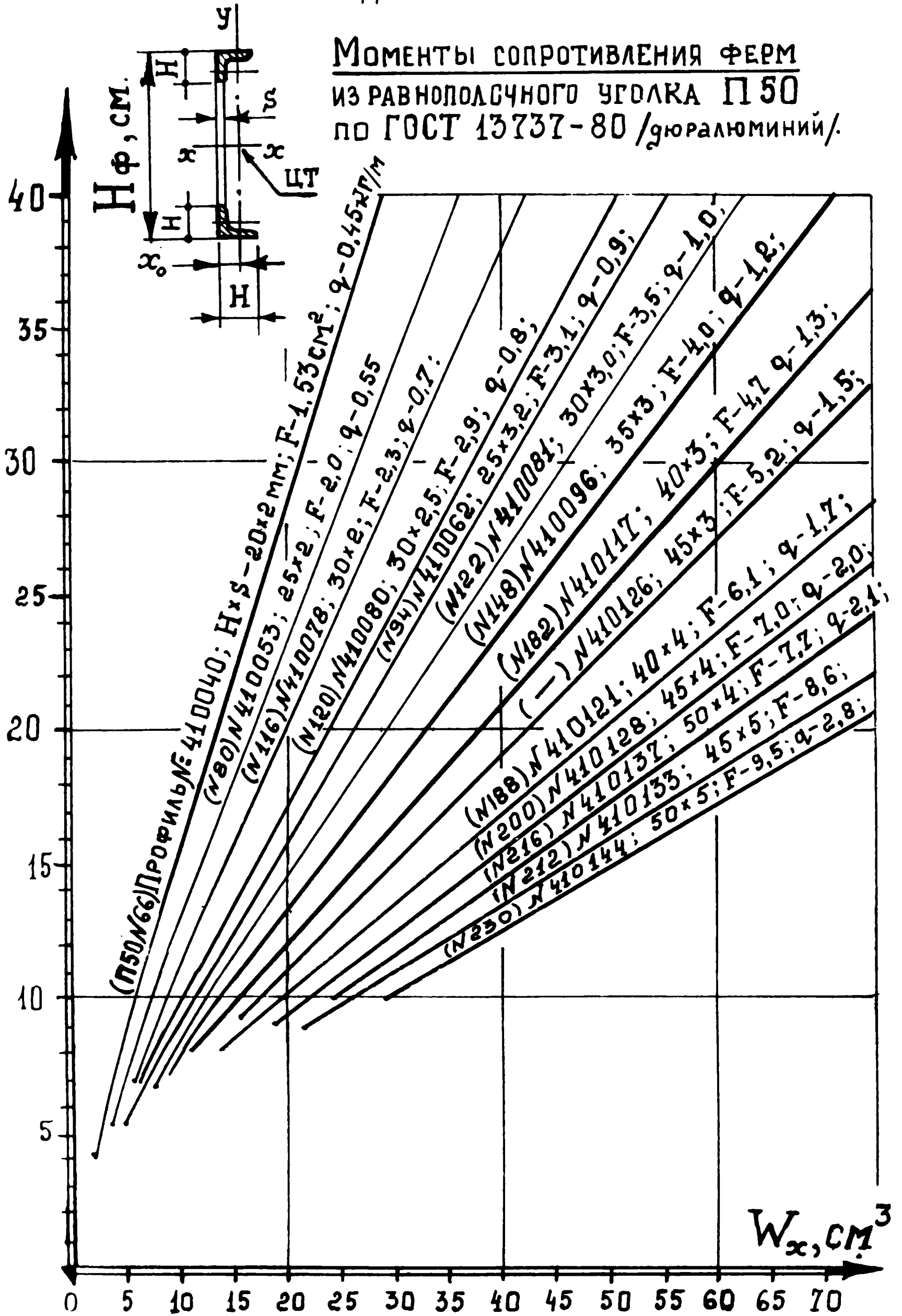


Рис. П, 8

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ФЕРМ

из квадратных труб ГОСТ 8639-68

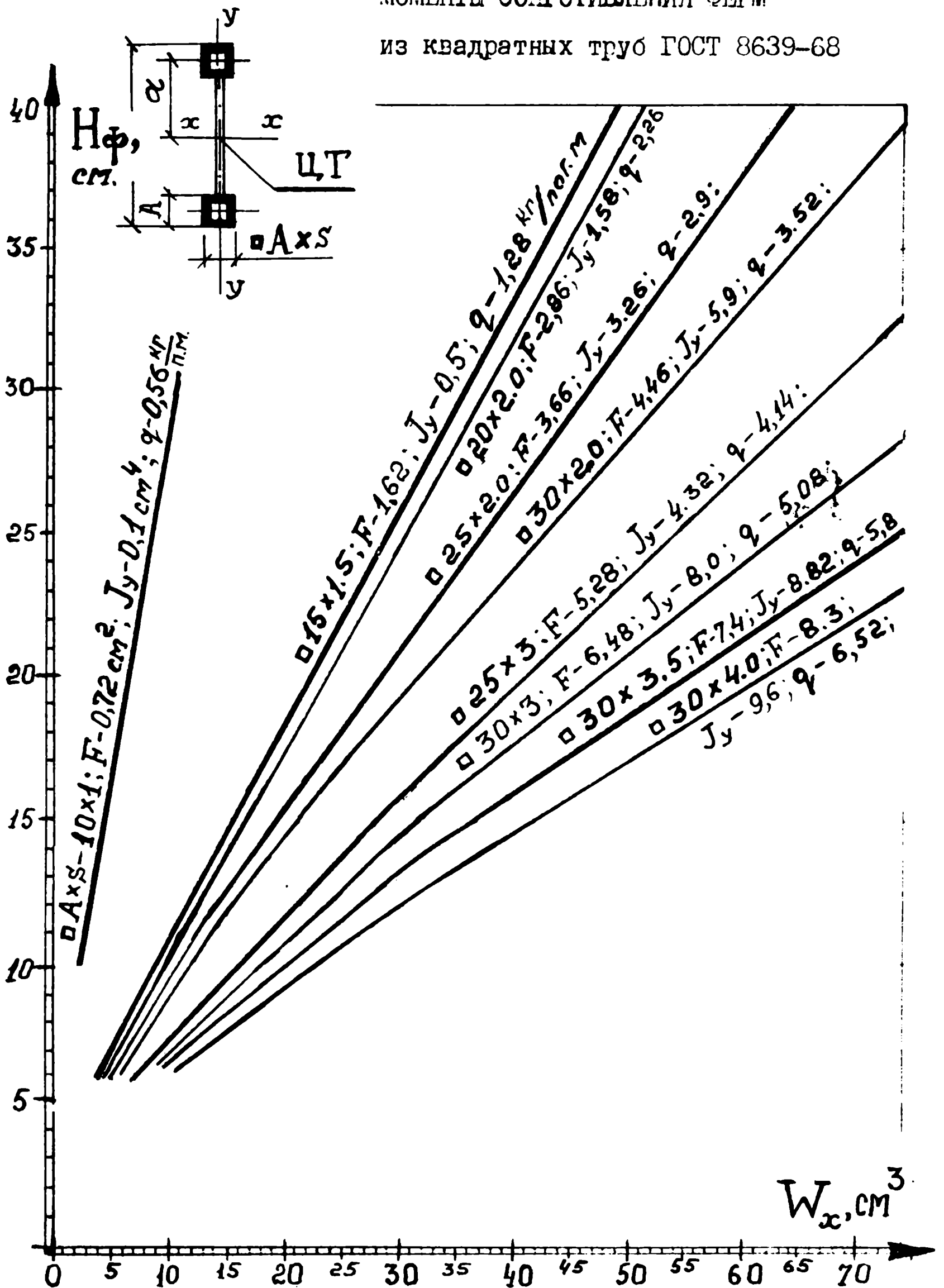


Рис. II, 9

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ФЕРМ

из прямоугольных труб ГОСТ 8645-68

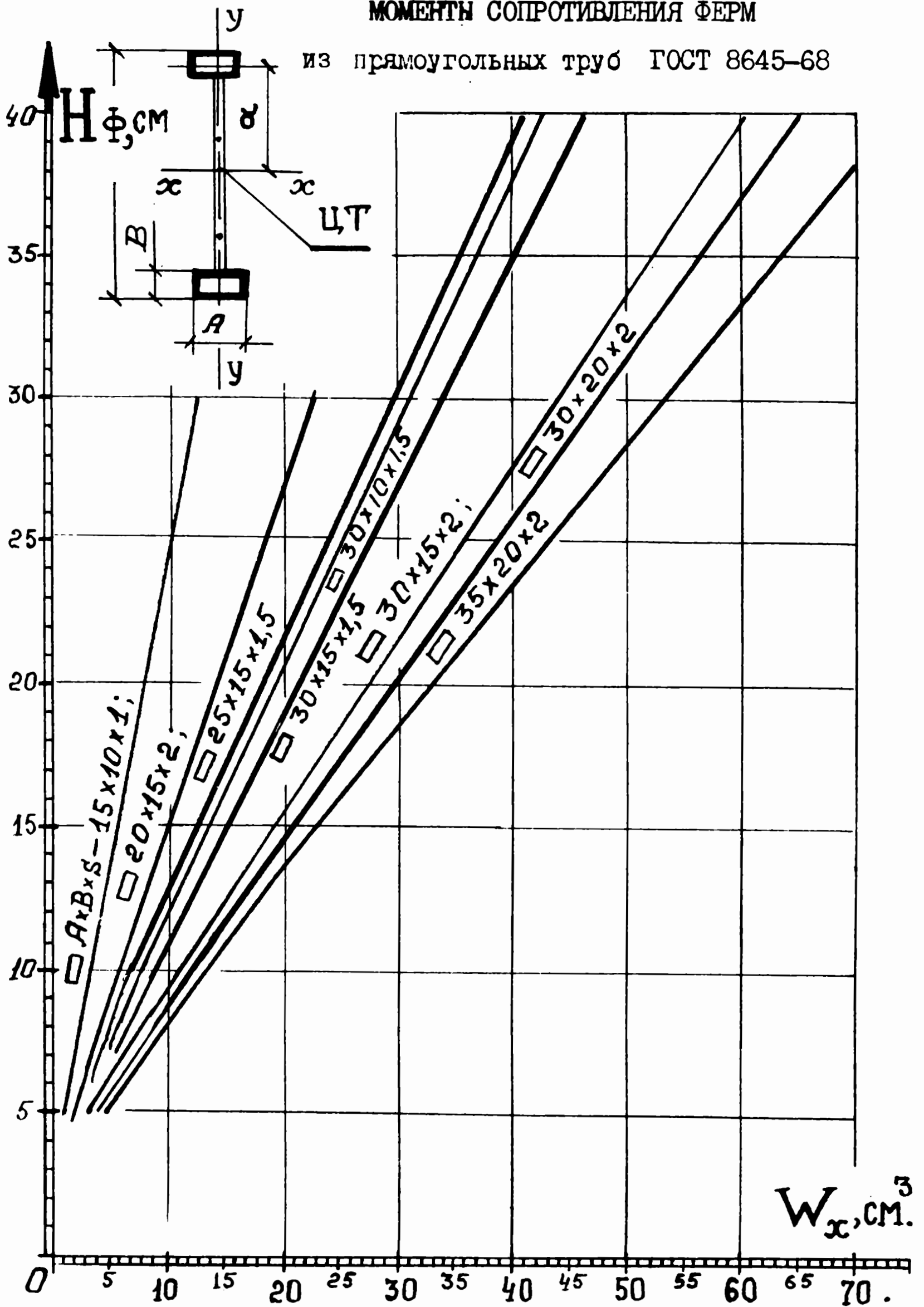


Рис. II, 10

МОМЕНТЫ СОПРОТИВЛЕНИЯ ФЕРМ
из прямоугольных труб ГОСТ 8645-68

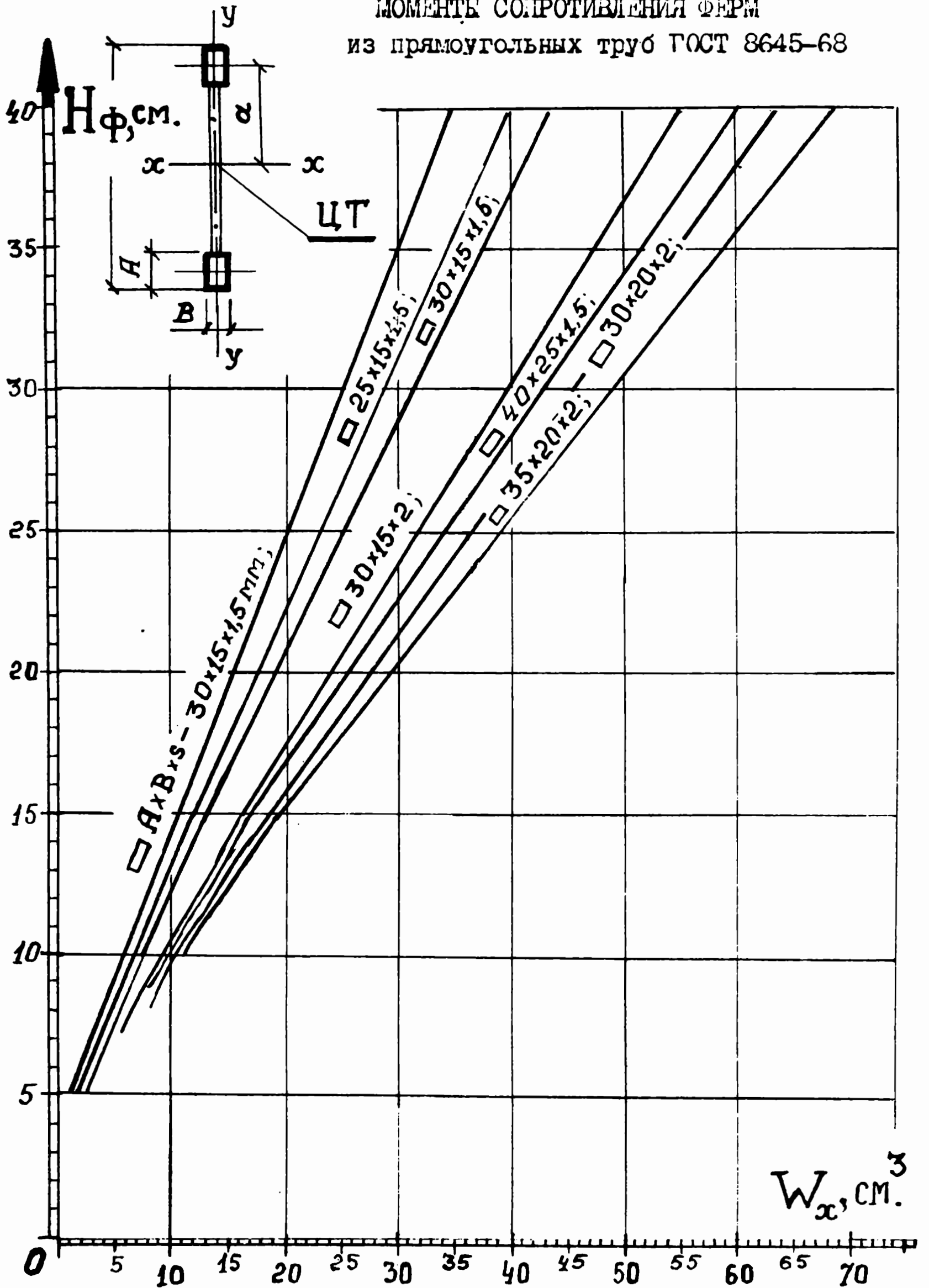


Рис. 7, II

П Р И Л О Ж Е Н И Е Ш

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ
И МОМЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЙ СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ ИЗ
ПРОКАТНЫХ ПРОФИЛЕЙ

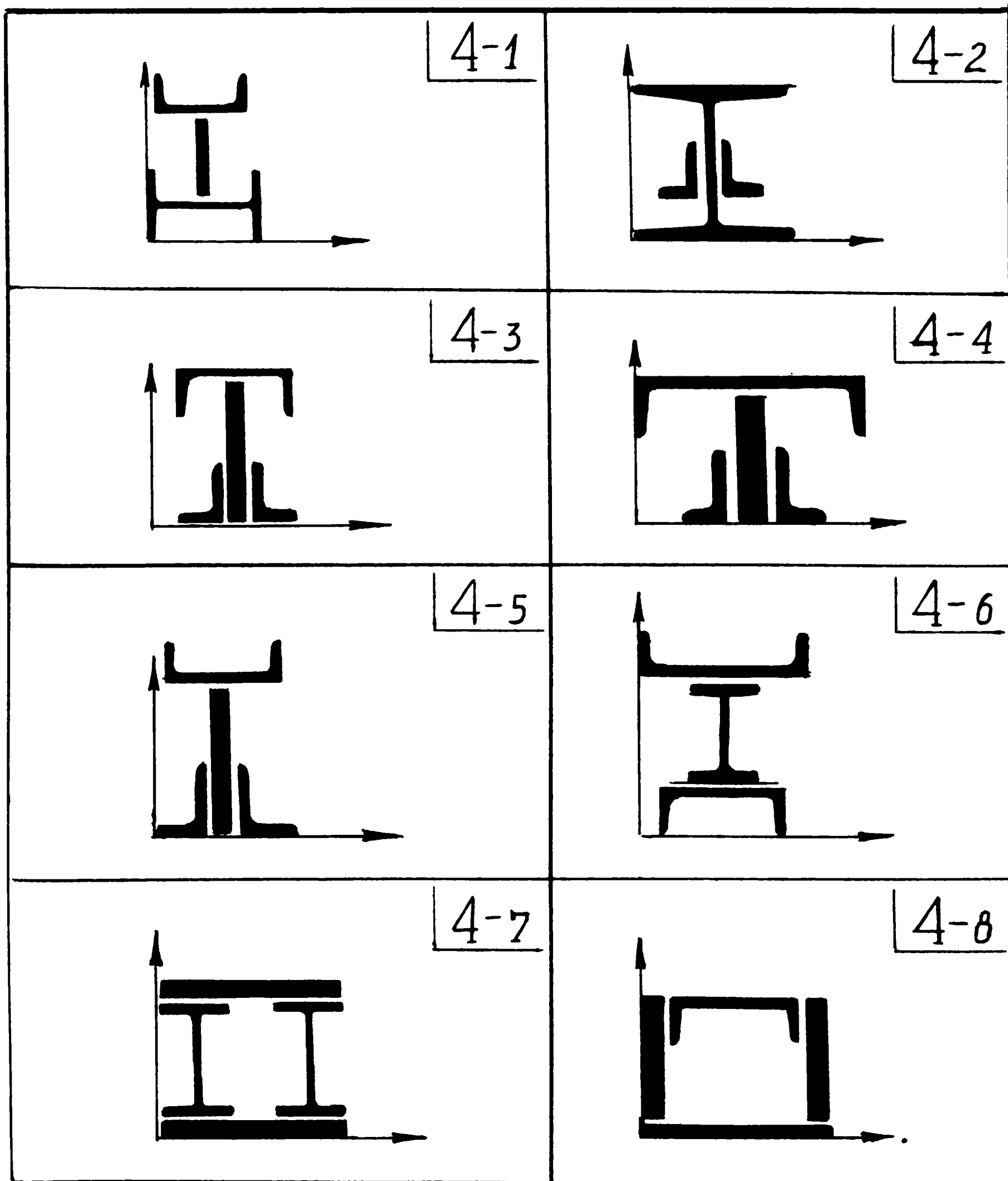


Рис. Ш, I

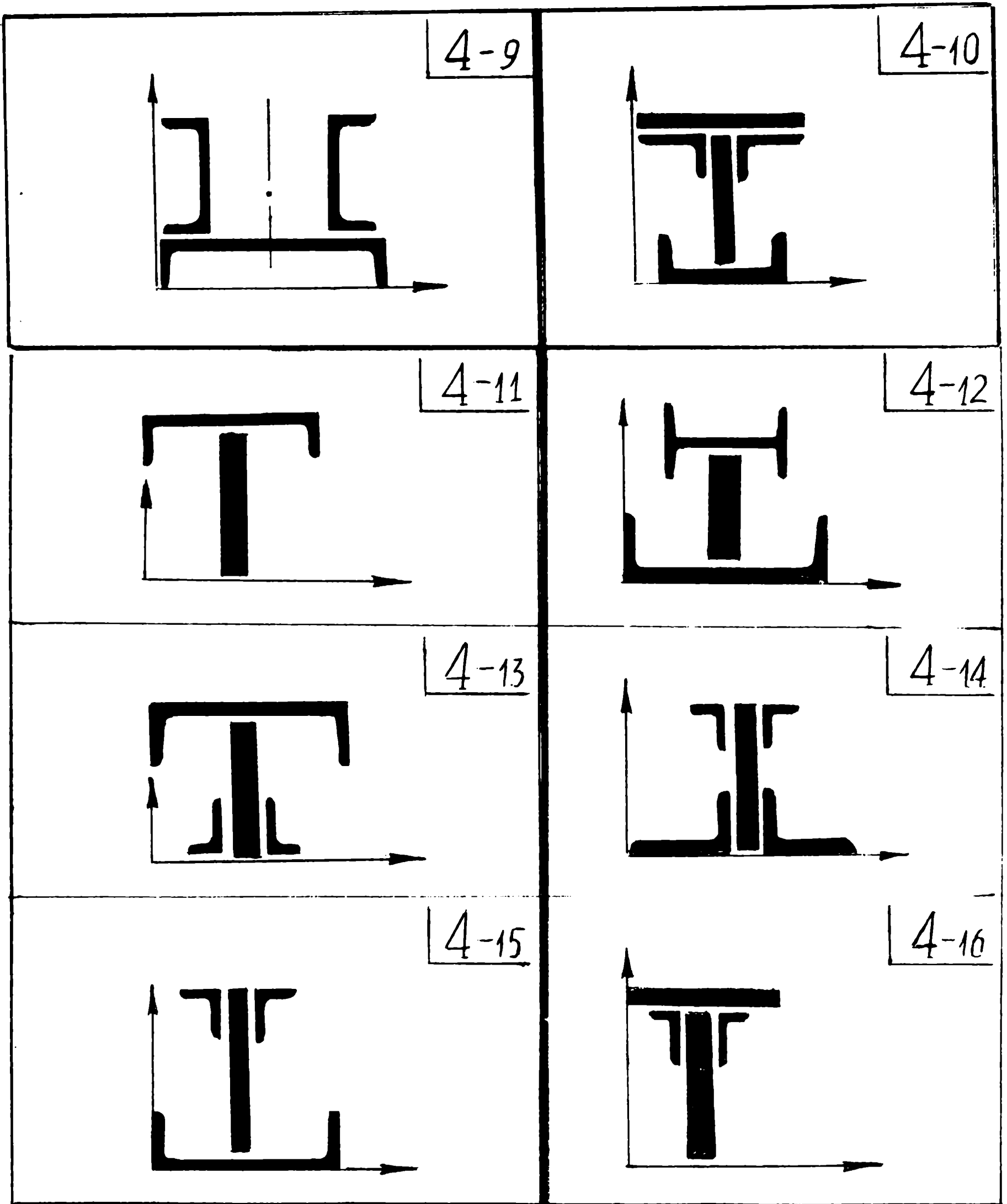
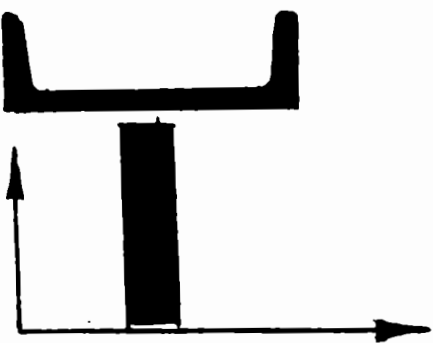
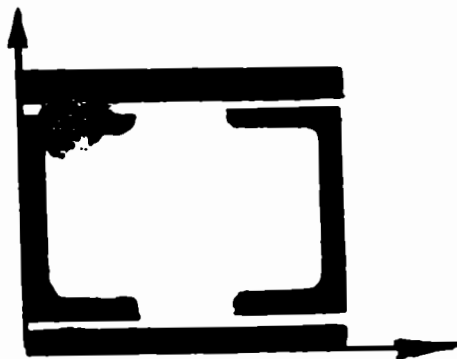


Рис. III, 2

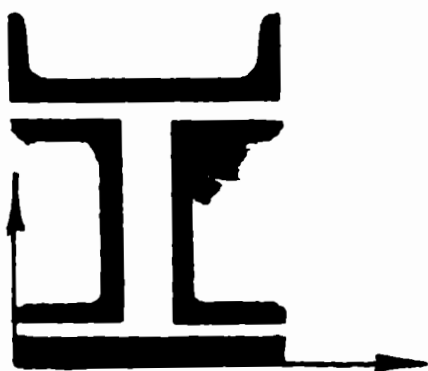
4-17



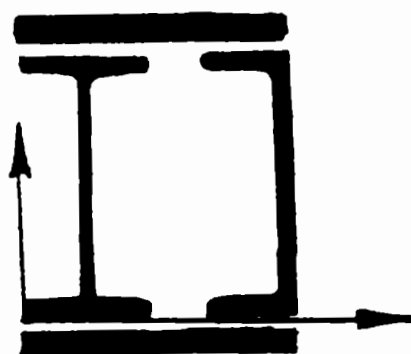
4-18



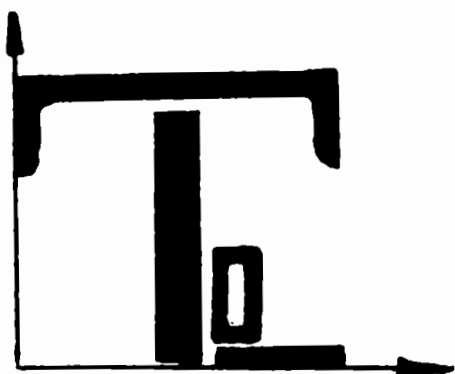
4-19



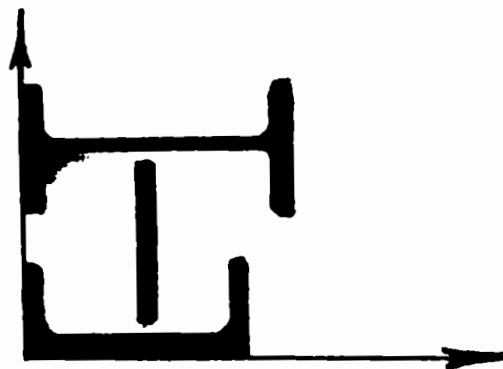
4-20



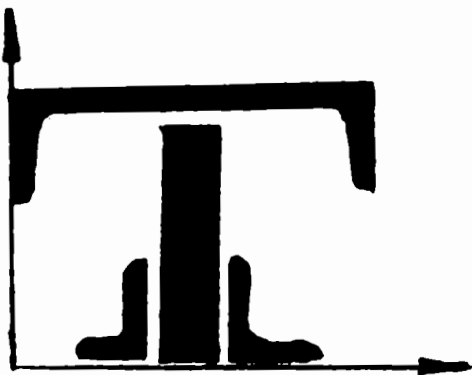
4-21



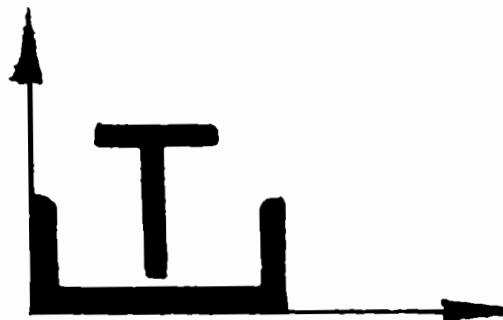
4-22



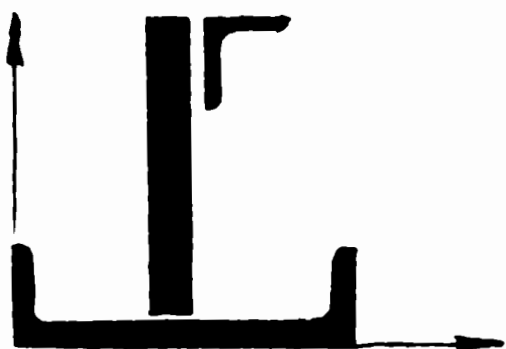
4-23



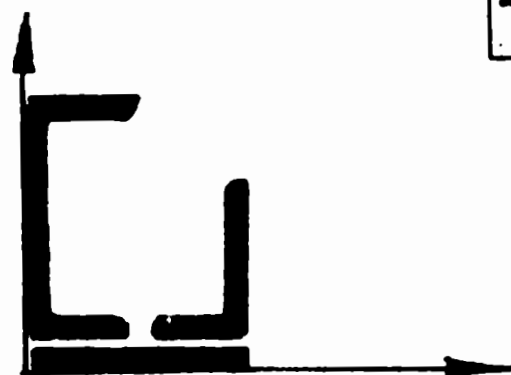
4-24



4-25

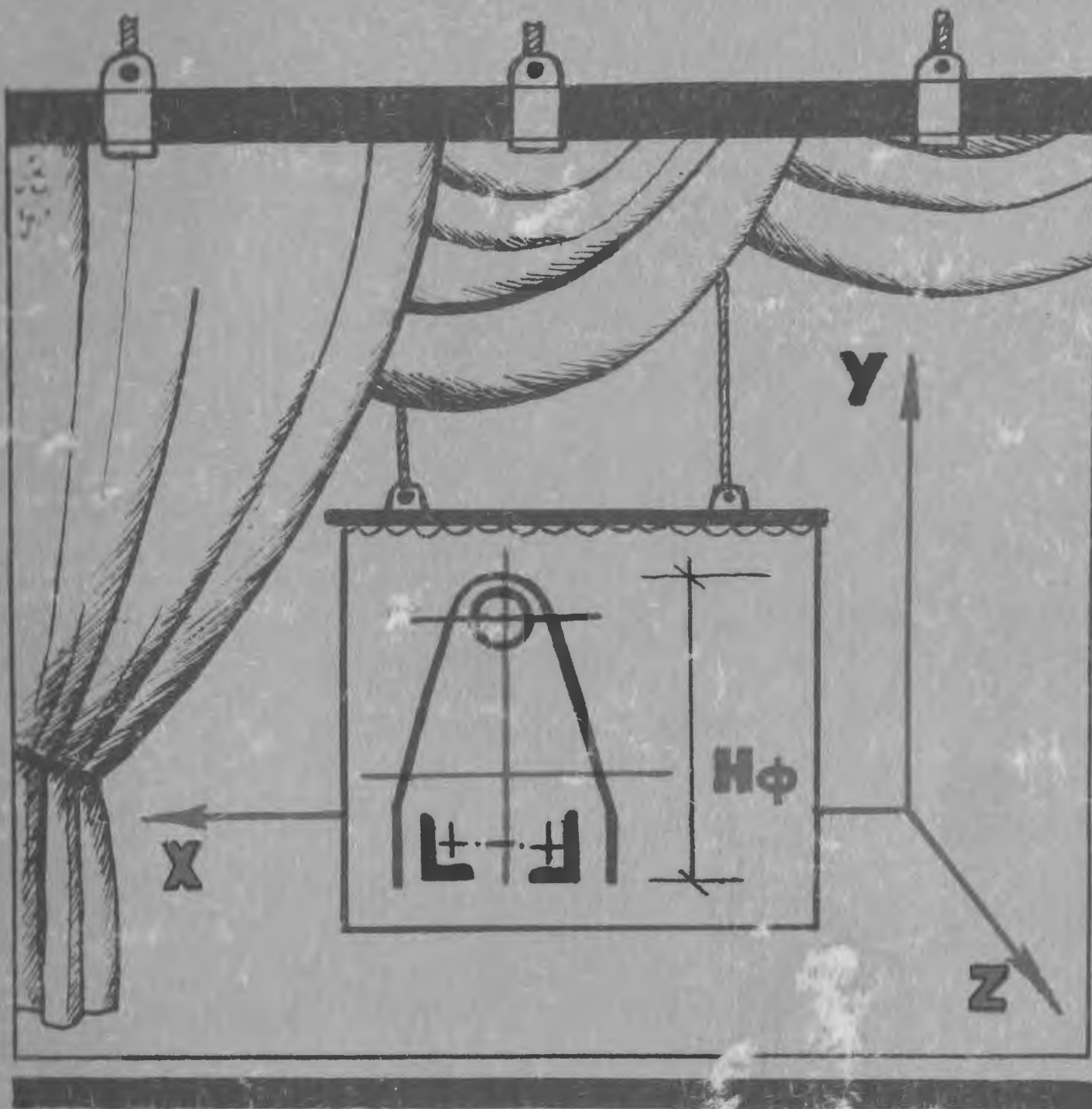


4-26



Подписано к печати 06.10.85 г. Заказ 2852
Тираж 500 экз. Формат бумаги 60 x 84 1/16.
Объем 3 печ. л. Ротапринт Типографии № 2
Ленуприздата. 191104, Ленинград,
Литейный пр. 55. Бесплатно.

есплатно



ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ
ХАРАКТЕРИСТИКИ
ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ